



國民中學 補強課程模組教學資源手冊

國中數學

七年級

甄曉蘭 —— 總策劃

陳致澄 —— 主編

陳致澄、蘇恭弘、盧昭雯、江世賓、張廷吉、莊佶達 —— 作者



教育部國民及學前教育署
K-12 Education Administration, Ministry of Education

國民中學
補強課程模組教學資源手冊
國中數學
七年級

甄曉蘭 —— 總策劃

陳致澄 —— 主編

陳致澄、蘇恭弘、盧昭雯、江世賓、張廷吉、莊佶達 —— 作者



教育部國民及學前教育署

K-12 Education Administration, Ministry of Education

目次

導論	國中數學學習扶助補強課程模組規劃理念與設計原則	陳致澄	1
七 年 級 補救模組 1	指數記法與科學記號	蘇恭弘	9
七 年 級 補救模組 2	代數符號及一元一次式	盧昭雯 / 江世賓	47
七 年 級 補救模組 3	統計圖表與統計數據	張廷吉 / 莊佶達	82
七 年 級 補救模組 4	二元一次聯立方程式的幾何意義	蘇恭弘	116
七 年 級 補救模組 5	比例式與正反比	張廷吉 / 莊佶達	153
七 年 級 補救模組 6	三視圖、對稱圖及符號表示	盧昭雯 / 江世賓	182

國中數學領域學習扶助補強課程 模組規劃理念與設計原則

— 國立臺南大學應用數學系 陳致澄教授

壹、緣起：數學領域學習扶助補強課程模組發展的重要性

一、體現「公平正義」確保「學力品質」的學習扶助計畫

二十世紀中葉後，追求教育機會均等 (equality of educational opportunity) 與提升教育品質 (enhancing of educational quality)，逐漸成為世界各國致力實現的教育理想（甄曉蘭，2007），而 Rawls (1972) 於《正義論》中也指出，教育應該在「公平正義」的原則下，實現教育機會與結果均等的目標。基此，鑑於國內出現部分地區因位置偏遠、地理環境特殊，導致對外交通不便、文化刺激較少、數位落差較大以及學校教師流動率高…等城鄉教育發展失衡的現象，教育部遂於 2006 年針對家庭弱勢與低學習成就的國中、小學生，推動《攜手計畫—課後扶助方案》；針對原住民學生人數比率偏高以及離島…等地域性弱勢的國中、小學生，推動《教育優先區計畫—學習輔導》。經過數年的實施與成效檢討，於 2013 年整合前述兩項計畫，針對弱勢家庭之低學習成就國中、小學生，規劃並推動《國民小學及國民中學補救教學實施方案》，期能為這群低學習成就的學生提供多元、適性的學習機會，以彌平學習落差，達成「確保學生學力品質」與「成就每一個孩子」之教育目標（蘇美麗、李永烈，2016）。然而，為了彰顯此計畫的正向、積極之意義，教育部自 2019 年起將「補救教學」更名為「學習扶助」，針對低學習成就學生，提供額外的學習機會與資源，設計並實踐符合學生個別需求的學習內容與方法，期能提升學生的學習成效（吳清山，2020）。

二、落實「學生適性發展」符合「彈性學習課程」的補強課程模組

再者，基於「教育可提升人力素質，有利國家社會發展」之前提，延長國民接受基本教育的年限，已逐漸成為世界各先進國家（例如：荷蘭、比利時、德國、英國、

以色列、澳洲、加拿大、法國、冰島、紐西蘭…等）普遍推行的國民教育政策（楊思偉，2006）。我國也在2010年《中華民國教育報告書》中，將「推動十二年國民基本教育」（簡稱十二年國教）列為重點工作項目之一，於2014年開啟十二年國教的新時代，並於2019年同時於高中、國中與國小等學習階段，分別從一年級、七年級與十年級起，逐年實施十二年國教新課綱（高翠霞、高慧芬、楊嵐智，2018）。而《十二年國民基本教育課程綱要—總綱》於「課程架構」一段中，將國小與國中階段的課程分為「部定課程—領域學習課程」與「校定課程—彈性學習課程」等兩類。其中，又提到「校定課程—彈性學習課程」將課程設計的主權，交由學校進行規劃與安排，期能藉此形塑出符合每一所學校教育願景以及強化學生適性發展的相關課程。而「領域補救教學課程」即為「校定課程—彈性學習課程」的內涵項目之一（教育部，2014）。由此可見，本計畫為中學需要接受學習扶助教學（補救教學）的學生，設計符合十二年國教「校定課程—彈性學習課程」建議的「數學領域學習扶助補強課程模組」，不僅迎合十二年國教課程的精神，也為這群「有特殊需求」的學生，開闢一條有別於「教科書」的學習徑路。

關於「模組」，Warwick (1988) 指出，「模組化課程」是由一些短程、獨立而完整的學習任務或活動結合而成的一套「學習素材」，能讓學生的學習達到較寬廣、較長程的學習目標。McNeil (1996) 提到，「模組化課程」可依據學習者與教學者的需要，隨意抽換、組合模組中的學習任務或活動，相較於傳統學科教科書來說，有更大的彈性與調整的可能。此外，賴慶三、楊繼正（2001）也提出，所謂「單元模組」、「模組化的教學活動設計」，是指一種適性化的教學活動，其目標明確、方法多樣、教學資源充足且豐富。「單元模組」相較於教科書來說，更以實用、生活化與趣味化的內容作為主軸，是一種具有建構知識、技能與情意等功能的完整學習教材。

貳、數學領域補強課程模組之架構與規劃

一、補強課程模組之架構

關於「模組化課程」，Finch 與 Crunkilton (1999) 界定「模組化課程」的六項基本要素：

- | **簡介 (introduction)**：介紹該模組的學習內容與特點，讓模組使用者知曉學習的步驟，瞭解該模組所需之先備知識以及培養的知識與技能；
- | **課程目標 (objectives)**：此「課程目標」包括教學目標與學習目標。其中學習目標主要在描述期望學習者完成該課程的學習後，能展現的能力與表現；
- | **前測 (pre-assessment)**：此工具可診斷、評估學習者在進行該課程學習前的學習準備度，以作為完成學習後能力差異比較的依據；

- | **教學活動 (teaching activities)**：介紹該課程設計的活動與情境（例如：動手做、提問、多元表徵…等），如何引發學習者的期待反應及參與學習，描述學習的歷程（包括明確的評量與回饋方式）；
- | **資源與教材 (resources & materials)**：主要說明課程進行過程中，所使用的教學材料之內容與實施時機、參考使用的線上平臺…等資訊；
- | **後測 (post-assessment)**：此工具是在學生完成「模組化課程」的學習後，所進行的總結式評量，目的在評估學生的學習成效。本數學領域補強課程模組的，乃參考 Finch 與 Crunkilton(1999) 的觀點，規劃設計架構如上圖 1 所示：



圖 1：本數學領域補強課程模組的設計架構

其中，「設計理念」主要說明該模組選擇此「核心概念」的重要性與緣由，也說明該模組設計的「表徵」特色；「課程架構」則呈現模組的整體核心概念之關聯性；「教學計畫」則包括模組名稱、涉及的學習重點（包括學習內容與學習表現）與基本學習內容、學習目標、學習材料與教學資源、教學活動流程與評量策略；「評量工具」則列舉本模組前測、後測的架構以及教學過程中提問的問題；「教學反思與應用建議」則分述本模組在個案學校進行實驗教學的反思，再針對教學的情形進行後續之教學建議。期能讓未來預備使用本模組的教師，在進行教學前，能預先構築課室中可能的圖像。

二、補強課程模組規劃之核心概念

鑑於本冊數學領域補強模組之目的，在於規劃七年級數學領域學習扶助之補強課程模組。考量模組適用的普及性，本計畫規劃小組參酌 2018 年與 2019 年教育部國民小學數學科學習扶助篩選測驗結果，找出受測學生錯誤率最高的前五道題目所屬之分年細目；以及 2020 年國中數學科學習能力檢測結果中，受測學生錯誤率最高的前五道題目所屬之分年細目，彙整相關資訊如下表 1 所示：

表 1：近年來全國七年級學生錯誤率較高之分年細目

2018 年科技化評量			2019 年科技化評量			2020 年學習能力檢測		
題號	分年細目	通過率	題號	分年細目	通過率	題號	分年細目	通過率
8	列出二元一次聯立方程式	18%	14	理解負數的特性並熟練數的四則混合運算	39%	25	二元一次聯立方程式的解法與應用	25%
21	二元一次聯立方程式的解與其圖形交點的關係	20%	20	列一元一次式	38%	18	一元一次式的代數運算	32%
14	畫二元一次方程式圖形	21%	21	比例式的基本運算	39%	12	二元一次聯立方程式的幾何意義	34%
24	一元一次式的代數運算	24%	23	列出二元一次聯立方程式	37%	15	科學記號	35%
18	比例式的基本運算	26%	25	能找出數線上兩點的中點坐標	31%	20	理解負數的特性並熟練數的四則混合運算	36%

由上表 1 觀之，「指數法與科學記號」（通過率 35%）、「一元一次方程式」（通過率 24%, 38%, 32%）、「比與比例式」（通過率 26%, 39%）、「直角坐標與二元一次方程式的圖形」（通過率 20%, 37%, 25%）為歷年學習扶助篩選測驗與學習能力檢測中，學生通過率較低的概念。考量幾何單元中「線對稱與三視圖」為 108 課綱中新安排的單元概念，並思考統計單元的「統計圖表與統計數據」是日常生活中一般公民必備的素養能力，因此，本計畫規劃七年級數學領域學習扶助補強課程模組的核心單元包括「指數記法與科學記號」、「比例式與正反比」、「二元一次聯立方程式的幾何意義」、「線對稱與三視圖」、「統計圖表與統計數據」以及「一元一次方程式」等六個核心概念。

參、數學領域學習扶助補強課程模組設計原則

本計畫規劃、設計的七年級數學領域學習扶助補強課程模組，主要目的在於提昇低成就學生的學習成就感以及強化其數學學習興趣，期能讓該群學生能夠重拾對於數學學習的動機與信心，透過不同於教科書的學習徑路，再次學習七年級重要的數學核心概念，以奠定其基礎的數學學力。鑑此，提出以下國中數學領域學習扶助補強課程模組設計的原則如下：

一、落實多元表徵理論於活動與任務之設計

蔣治邦（1994）指出，「表徵」(representation) 是用某一種型式，將事物或想法重新表現出來，以達成溝通的目的；當學習者能確實掌握其表現的意義後，「表徵」可進一步地成為運思的材料，來簡化解題的過程。Hieberrt 與 Carpenter (1992) 認為，「表徵」存在的形式可以區分為「外在表徵」(external representation) 與「內在表徵」(internal representation) 兩類，而這兩類「表徵」分別在人類的溝通活動與心智思考中，扮演重要的角色。個體內在表徵的運作，會影響外在表徵的呈現；而個體也可藉由呈現外在表徵的過程，讓內在表徵得以精煉（蔡興國、陳錦章、張惠博，2010）。而美國數學教師協會 (NCTM, 2000) 在《學校數學的原則與標準》(Principles and Standards for School Mathematics) 中也提到，使用「表徵」來詮釋數學概念，可促進學生理解學習內容，有助於與別人溝通想法、連結相關概念。再者，Ainsworth (1999) 提到，若能以多重表徵的方式來表示一個概念，對於學生的學習將有互補 (complement) 的功能。因為，不同表徵方式能互補資訊，避免一種表徵無法表示所有訊息的缺憾（左台益、蔡志仁，2001）。對此，相關研究（例如：Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Lesh, 1981; Lesh, Landau & Hamilton, 1983; Lesh, Post & Behr, 1987）指出，數學學習與問題解決過程中有實物情境 (real scripts)、操作模型 (manipulative models)、靜態圖 (static pictures)、口說語言 (spoken language) 與書寫符號 (written symbols) 等五種表徵系統（參見下圖 2）。

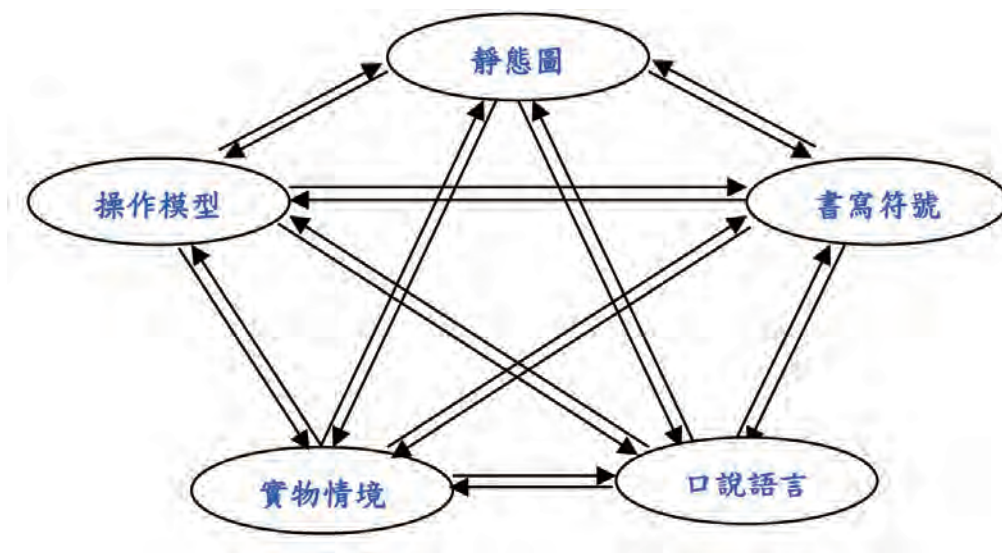


圖 2：數學表徵形式 (Lesh, Post & Behr, 1987)

由圖 2 觀之，教科書與一般課室教學關於概念表徵的形式，有較多比例屬於「書寫符號」、「靜態圖」與「口說語言」等表徵形式。而本計畫設計的七年級數學領域學習扶助補強課程模組，試圖另外從「操作模型」與「實物情境」等表徵形式著手進行規劃，為低成就學生開闢另一條可再次重新理解相關概念的路徑與管道，期能提升其學習動機與學習成效。

二、設計以學習者為中心的多元化、差異化學習活動

環顧當前臺灣的教學現況，由於入學考試制度的影響，導致許多教師經常為了趕進度、幫學生準備考試，形成「考試領導教學」(teaching to the test) 的氛圍，進而形塑出「以教師為中心」(teacher-centered) 的講述式教學模式（吳俊憲，2012）。在此教學模式下，教師講授、詮釋數學概念的方式，多以較為抽象的「口說語言」與「書寫符號」等形式為主，這些形式往往超越低成就學生可理解的範疇，導致低學習成就學生難以「參與學習」甚至成為「數學課室中的客人」。鑑此，本計畫設計的國中數學領域學習扶助補強課程模組的另一原則，即期望能跳脫「以教師為中心」的傳統課程與教學設計「以學習者為中心」(learner-centered)，考量低學習成就學生的學習風格 (learning style)，重視每位學生的個別差異 (individual differences) 進行規劃。

Dunn 與 Dunn (1992) 指出，「學習風格」是指一個人的學習習慣、方法及態度；並且，「學習風格」會影響學習者對其所處環境的知覺、互動與應對的能力。黃國豪、張仕政、陳冠宏、尤弘志（2005）依據「所羅門學習風格測驗」，將學習者的「學習風格」分為四個組對，每一個組對各有兩種類型，因此，共有「活躍型 v.s. 沉思型」、「感悟型 v.s. 直覺型」、「視覺型 v.s. 言語型」、「序列型 v.s. 綜合型」等八種類型。其中，「活躍型」是指學習者須與其他人進行討論或親身體驗，才能產生學習成效；「沉思型」則指學習者獨自思考就能解決問題；「感悟型」是指學習者較能理解日常生活中所接觸的相關事物，較無法想像較抽象的事物；「直覺型」是指學習者對於太過詳細或重複性的學習會感到不耐煩，須透過親自嘗試，才會產生學習成效；「視覺型」是指學習者需透過圖解的學習過程，才能產生學習成效；「言語型」則是指學習者透過文字敘述的學習過程，即能產生學習成效；而「序列型」是指學習者在學習過程中，必須從最基本的著手，按照順序進行學習；「綜合型」則是指學習者只要對各方面都具備初步認識後，就能自行融會貫通。綜覽上述八種類型的學習風格，低學習成就學生多屬「活躍型」、「感悟型」、「視覺型」與「序列型」等四類學習風格，因此，面對上述不同學習風格偏好的學生，本計畫設計的國中七年級數學領域學習扶助補強課程模組，盡可能在每一套課程模組中設計多元、不同表徵形式的學習活動，讓學生能在同一節課中，使用多重感官與實例進行學習。如此一來，不僅能讓不同學習風格的學生在其偏好的學習管道和

方式中進行有效學習，也能協助學生在接觸不同學習風格的活動中，累積其經驗，拓展學習風格 (style-stretching)，增加其學習風格的彈性 (Gregersen & MacIntyre, 2014)。

根據上述有關低學習成就學生學習風格之探討，本計畫設計的七年級數學領域學習扶助補強課程模組，是以日常生活中經常接觸的相關事物進行設計（例如：手工拉麵店的指數現象；各國錢幣的觀察）；安排親身體驗以及與其他人討論的情境（例如：觀看影片、小組進行討論與搶答）；也鋪陳操作、繪圖的任務（例如：製作三視圖基本結構並自行設計三視圖模型），期能讓學生在教學活動或任務的執行過程中，達到應用多重感官進行學習的目標。

肆、結語

本冊刊載了六套七年級數學領域學習扶助補強課程模組，都歷經兩次於個案班級中試行、修正與調整，堪稱具備理論與實務的支持與驗證。然而，鑑於每一個教學現場中的教學者與學習者不盡相同，學生擁有的學習風格與特質也有差異，因此，本計畫在此提醒欲使用本課程模組的教師，應考量自己任課班級學生的特性與實際需求，調整課程模組的相關內容，或是參考上述本計畫所提列關於課程模組設計的原則，以及各課程模組所呈現的教學策略，自行修改課程模組，使之成為更適於自身教學情境、更符合自己授課學生所需的學習扶助補強課程模組。此外，本冊所規劃、設計的學習扶助補強課程模組，原則上雖以七年級未通過，基本學習內容篩選測驗的學生為主要教學對象，但其適用的對象可不限於此範圍，對於那些通過篩選測驗，但仍猶待加強的學生，教師仍可依據學生呈現的弱勢概念，挑選對應的課程模組，加以調整而使用之。當然，教師亦可將本計畫設計的學習扶助補強課程模組作為一搬課室教學的補充式課程模組。是故，本冊提供的六套七年級數學領域學習扶助補強課程模組，使用時機也不限於抽離式的學習扶助課程，只要課程模組目標符合學生的需要，這些課程模組也可運用於課中學習扶助教學，甚至運用於一般數學課室的教學中實施與使用。

參考文獻

- 左台益、蔡志仁（2001）。高中生建構橢圓多重表徵之認知特性。*科學教育學刊*，**9**(3)，281-297。
- 吳清山（2020）。教育名詞：學習扶助。*教育研究月刊*，**310**，135-136。
- 吳俊憲（2012）。推動高中職學校優質化—「學習領導」之觀點分析。*臺灣教育評論月刊*，**1**(10)，39-42。
- 高翠霞、高慧芬、楊嵐智（2018）。十二年國教議題課程的挑戰—以環境教育為例。*臺灣教育評論月刊*，**7**(10)，68-75。
- 教育部（2014）。十二年國民基本教育課程綱要—總綱。臺北市：作者。

- 黃國豪、張仕政、陳冠宏、尤弘志（2005）。結合所羅門學習風格之適性化學習與評量系統。載於國立臺灣師範大學主辦，2005 臺灣數位學習發展研討會。臺北市：國立臺灣師範大學。【2005.05.06-2005.05.07】
- 楊思偉（2006）。推動十二年國民教育政策之研究。《教育研究集刊》，52(2)，1-31。
- 鄭竣玄、黃啟彥（2001）。模組化生活科技教學設計。《生活科技教育月刊》，36(2)，53-65。
- 甄曉蘭（2007）。偏遠國中教育機會不均等問題與相關教育政策初探。《教育研究集刊》，53(3)，1-35。
- 蔡興國、陳錦章、張惠博（2010）。高中學生解題歷程之力圖表徵與列式關係之研究。《科學教育學刊》，18(2)，155-175。
- 賴慶三、楊繼正（2001）。國小自然資源教學模組的發展研究。《國立台北師範學院學報》，14，673-704。
- 蘇美麗、李永烈（2016）。國中小補救教學實施方案之教學現場省思。《臺灣教育評論月刊》，5(11)，28-31。
- 蔣治邦（1994）。由表徵觀點探討心教材數與計算活動的設計。國民小學數學科新課程概說 - 低年級。新北市：臺灣省國民學校教師研習會。
- Ainsworth, S. E. (1999). The functions of multiple representations. *Computer & Education*, 33(2/3), 131-152.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.
- Dunn, R. & Dunn, K. (1992). *Teaching elementary students through their individual learning styles*. Boston: Allyn & Bacon.
- Finch, C. R., & Crunkilton, J. R. (1999). *Curriculum development in vocational and technical education (5th ed.)*. Boston: Allyn & Bancon.
- Gregersen, T., & MacIntyre, P. (2014). *Capitalizing on language learners' individuality*. Bristol, UK: Multilingual Matters.
- Hiebertr, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 65-97. New York: Macmillan.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 235-264.
- Lesh, R. A., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem solving research. In R. A. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 263-341. New York, NY: Academic Press Inc.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*, 33-40. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- McNeil, J. D. (1996). *Curriculum: A comprehensive introduction* (5th ed.). New York: Harper Collins.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. Reston, VA : NCTM.
- Rawls, J. (1972). *The theory of justice*. Cambridge, MA: Harvard University.
- Warwick, D. (1988). *The Modular Curriculum*. Oxford: Blackwell.

國中數學領域 補強課程模組 1

七年級

指數記法與科學記號

— 臺南市創思與教學研發中心 蘇恭弘研究教師

設計 理念



學生對於數學的學習，常常隨著年級的增加而降低學習的意願。究其原因，除了教材難度增加外；另一個可能的原因，是當學生在學習過程中，遇有一個先備概念存在迷思或是對於教材內容不熟悉時，便會影響其後續的學習成效，導致學習的信心降低，也逐漸失去學習意願，最終放棄學習，淪為教室中無聲的客人。

綜觀國內外中學數學課程，有關指數概念、記法與科學記號皆被列為國、高中階段重要的學習內容之一（教育部，2004；NCTM，2000）。李青春與胡學誠（2009）認為，正確理解數學概念是掌握數學基礎知識的前提；因此，在教學方式，建議從學生已有的先備知識和生活中實際的例子出發，再引入新的概念。換言之，數學概念的形成，大多是來自實際的經驗與客觀的事物或是生活中的例子之數字計算；然後，將這些經驗抽象化；最後形成一個新的概念。但當七年級的學生第一次接觸指數概念、記法與科學記號時，宥於國小階段學習的數學內容，尚未引進指數的概念，因此，學生尚未建立基模，無法進行類化或是轉化，導致許多學生，在指數的概念發展及運算上，產生學習困難；部份學生甚至出現迷思概念：將指數及乘法的運算技能視為相同的操作方式，這對於指數的運算、指數律的學習將產生不良的影響。

Bebr. Lesh. Post 與 Silver (1983) 指出數學的表徵有許多種類，例如：生活情境、操作物、圖像、語言、符號等，本補強課程模組透過生活中的實例如：手工拉麵條製作、紙張對摺 等，逐步引入指數記法的概念，再逐漸進入指數符號的表徵，避免像教科書一般，教學時直接引入抽象的運算規則操弄、題目反覆計算或者在教學過程中太過急於呈現結果，導致讓學生只流於運算規則的記憶而無法理解本單元的邏輯思維。本

模組還引入大面額的紙幣，讓學生理解指數運用在生活實例中的便利性。至於在科學記號的教學部份設計亦是如此，運用大面額的紙幣、晶元製程、NASA 的火星探測車、空氣品質…等遍布在不同生活領域的實例 (如圖 1)，教師可視學生的真正生活經驗與接受程度，自行選取適合的例子進行介紹，讓學生能感受到科學記號在生活中的應用，並體會科學記號的重要性。

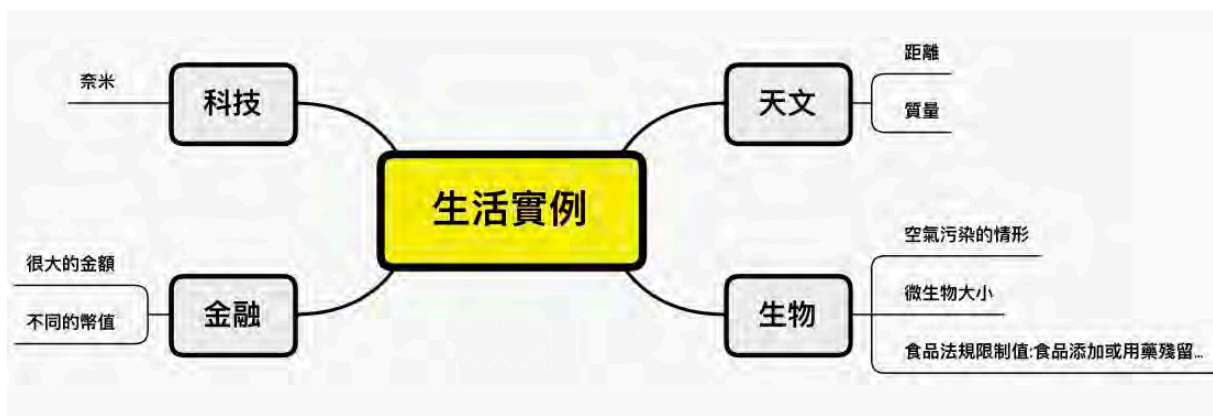


圖 1：科學記號在生活領域實例的相關舉例

綜合來說，本教材設計的理念，是以學生為主體，讓學生在具體的生活情境與實際的操作中進行觀察與探究，並以小組互相討論的方式運作，期能讓學生對於本模組涉及的數學概念內化並深化理解，也進行相關的運算練習，逐步引導學生認識指數、科學記號等相關概念，並為後續的指數律單元以及高中指數、對數函數相關概念與技能奠立良好的基礎。

課程 架構



關於本模組涉及的主題及核心概念，如圖 2：

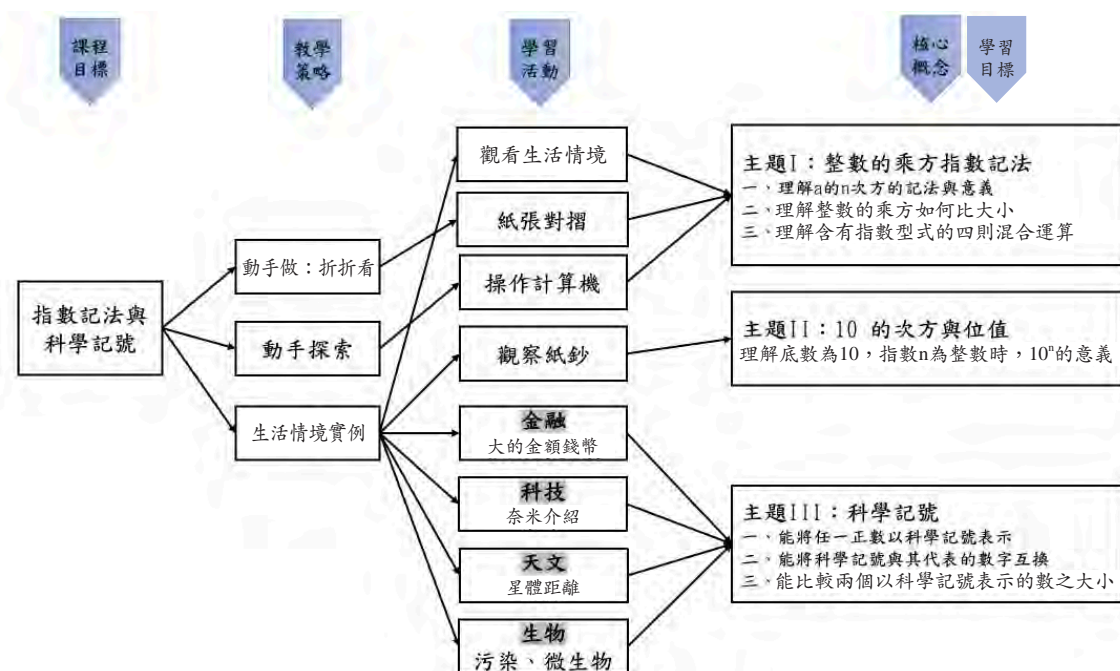


圖 2：課程架構圖

- (一) 主題 I (第 1~2 節課)：配合學習單一 (附件 1)，首先讓學生觀看網路上有關手工拉麵店師傅現場製作麵條的影片，讓學生觀察麵條的數量產生什麼樣的變化；接續再利用分組討論的方式思考並嘗試進行紙張的對摺活動，探討一張紙最多能對摺幾次？來引發其對於指數概念的學習動機，以建立學生對指數記法學習的需求感。最後，使用計算機的操作，讓學生瞭解乘方如何進行大小比較的概念。
- (二) 主題 II (第 3 節課)：本節課主要在建立整數的乘方與指數記法的概念配合學習單二 (附件 2) 因此，首先利用生活情境中外幣「辛巴幣紙鈔」的介紹來引發學生的新視野與新奇感。由於它的面額相當大，當學生看見這樣的貨幣時，可讓學生形塑出需求感，以建立 10 的次方與位值的關係。
- (三) 主題 III (第 4~6 節課)：延續第 3 節建立的觀念，主題 III 配合學習單三 (附件 3) 再舉出不同領域的實際案例，讓學生思考如何能簡化一些數字很大的或很小的數字，來表示這些數，藉此引出以科學記號表示正數的需求感，進而學習將科學記號與數字互轉換，並學習比較兩個以科學記號所表示的數之大小。

教材 分析



(一) 補強課程模組之重要性

本模組包含「指數記法」與「科學記號」，「指數」是表示連乘積的簡便計數符號，藉由指數記法，再輔以未來會學到的「指數律」單元，就能讓乘法的運算變得比較簡單。以 111 年國中教育會考非選第 1 題如圖 3 為例，學生在判斷 4^k 個綠藻細胞是否足夠製作 8 公克的「綠藻粉」時，只要利用簡單的指數運算後，再進行比較會比直接以數值比較大小來得容易。

1. 健康生技公司培養綠藻以製作「綠藻粉」，再經過後續的加工步驟，製成綠藻相關的保健食品。已知該公司製作每 1 公克的「綠藻粉」需要 60 億個綠藻細胞。

請根據上述資訊回答下列問題，完整寫出你的解題過程並詳細解釋：

- (1) 假設在光照充沛的環境下，1 個綠藻細胞每 20 小時可分裂成 4 個綠藻細胞，且分裂後的細胞亦可繼續分裂。今從 1 個綠藻細胞開始培養，若培養期間綠藻細胞皆未死亡且培養環境的光照充沛，經過 15 天後，共分裂成 4^k 個綠藻細胞，則 k 之值為何？
- (2) 承 (1)，已知 60 億介於 2^{32} 與 2^{33} 之間，請判斷 4^k 個綠藻細胞是否足夠製作 8 公克的「綠藻粉」？

此外進入高中課程之後，可以將所有的正實數都寫成指數型態，並利用指數運算來取代乘法，這正是「用加法來計算乘法」的便利性，進一步會得到「估計大量乘法運算之數值」的方法。

而「科學記號」單元在數學領綱中很明確的說明：本條目重點在於科學記號的了解與使用，例如 1 奈米等於 10^{-9} 公尺，其中含有負數次方的部分，可以使用小數與之轉換來解釋，不宜牽涉到其他底數的負次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。為什麼會有這種轉變究其原因，應該是學生的學習為出發點。

108 課綱實施之前對於「科學記號」課程的安排，教學時間雖放在在國一上學期，但直到國二學習理化課程時才有運用的機會，因此對於學生來說，常常造成學習上的困難。因此 108 課綱將科學記號的內容加以簡化，相關介紹移至高一上學期第一章，不僅能使國高中的課程銜接順暢，也顧及學生學習的成熟度。因此本模組以生活的實例為發展重點，讓學生透過生活實例理解學習科學記號的重要性。下圖 3 為本課程模組學習內容與其他年段學習內容間的關係圖。

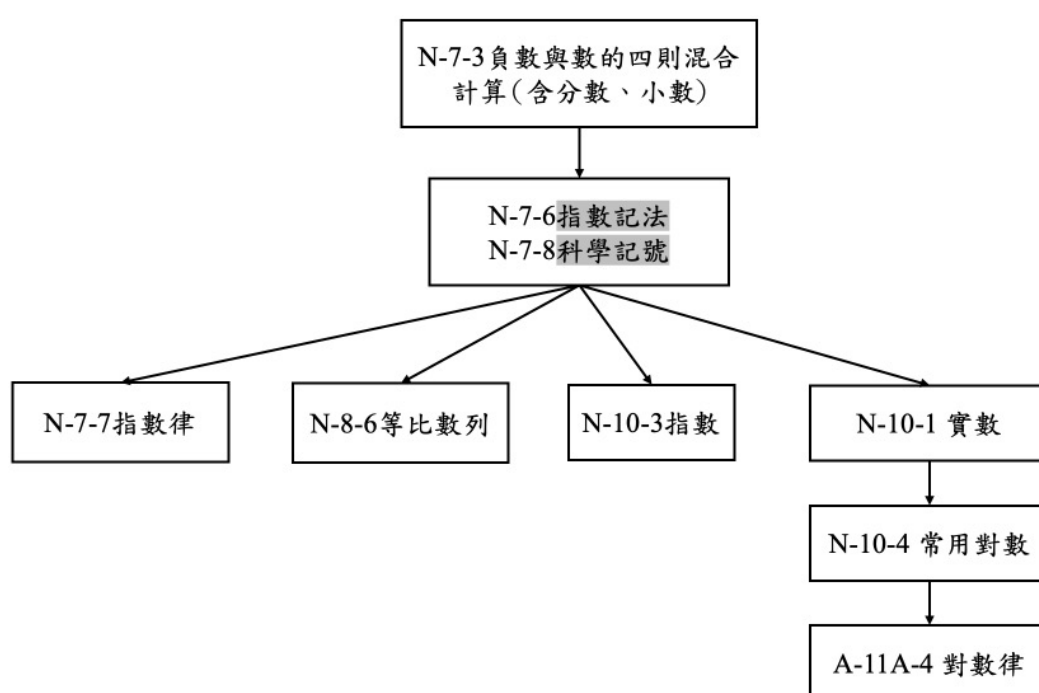


圖 3：補強課程模組學習內容與其他年段學習內容間的關係圖

(二) 補強課程模組之學習內容分析

本補強課程模組「指數記法與科學記號」的學習內容，分為「整數的乘方指數記法」、「10 的次方與位值」及「科學記號」三部分。本補強課程模組希望學生理解整數的指數記法與科學記號的意義後，能以簡化連乘積的形式處理很大的數字或很小的數字，並且掌握它們的運用方式。有關於本補強課程模組教材的核心概念與學習目標架構，如圖 5 所示。

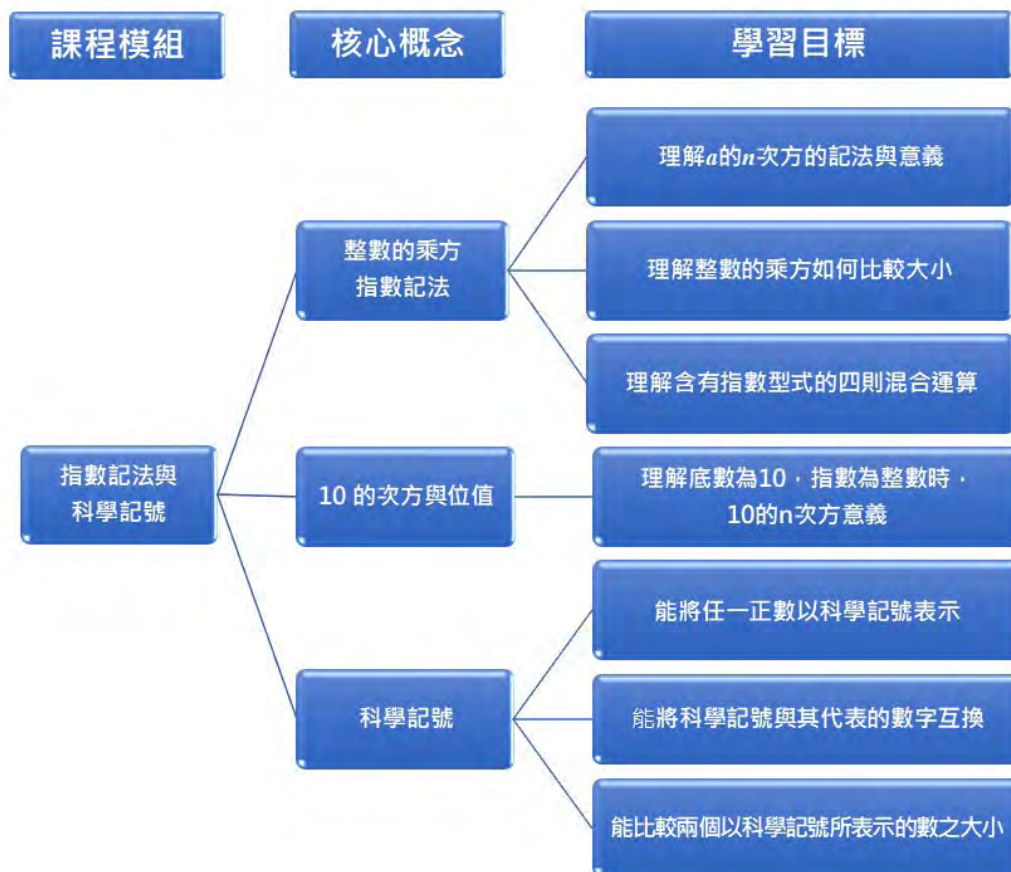


圖 4：本補強課程模組的核心概念與學習目標架構

(三) 教材分析與課程架構的關係

本補強課程模組「指數記法與科學記號」的教材學習內容，其目的都在於建立學生處理數的另一種表示的學習，指數是處理連乘積的簡便計數符號；而科學記號對於未來面對很大的數與很小的數時，會有很大的便利性。因此，打好學生良好的學習基礎並保持高昂的學習動機，是本補強課程模組的主要目的。本補強課程模組的教材分析與課程架構之關係如表 1 所示。

表 1：本補強課程模組教材分析與課程架構之關係性說明

課程模組核心概念	學習活動	教學策略	教學內涵
主題 I 整數的乘方指數記法 (2 節課)	觀看生活情境影片	情境表徵	1. 配合學習單一，引入生活中有關製作麵條的例子，讓學生透過觀看影片，探索麵條的數量產生什麼變化，並思考是有更恰當的表示法來表示麵條的數量。
	紙張對摺	動手做	2. 讓學生動手將紙張重覆對摺，討論可摺成最多的層數或是最多的次數為何，探討紙張每對摺一次時，對紙張的層數有何改變？ 3. 透過以上兩個活動引出「整數的乘方指數記法」，目的在於讓學生理解 a 的 n 次方的記法與意義。
	操作計算機	科技融入 動手做	4. 當學生學會「整數的乘方指數記法」且能進行「含有指數型式的四則混合運算」之後，本活動是讓學生利用計算機的操作，進行 5^6 、 5^7 、 5^8 或 0.1^6 、 0.1^7 、 0.1^8 ，兩組數字的大小比較。目的在於讓學生理解整數的乘方如何比大小。
主題 II 10 的次方與位值 (1 節課)	觀察世界各國錢幣	生活情境 實例	配合學習單二生活中 <u>辛巴威</u> 發行的一百億紙鈔作為學習的切入點。因為，該國錢幣的幣值很大，所以，能引導學生利用國小學過的定位板來理解這個很大的數究竟有多大。 目的在於讓學生理解「底數為 10，指數為整數」時，10 的 n 次方的意義。
主題 III 科學記號 (3 節課)	金融 科技 天文 生物 議題融入	生活情境 實例	配合學習單三，介紹生活有關整數的乘方，10 的次方 ... 等實例。例如：大面額的紙鈔、晶元製程、NASA 的火星探測車、空氣品質問題...等遍布在不同生活領域的案例，讓學生能感受科學記號在生活中的應用，體會科學記號的重要性。也能將任一正數以科學記號表示，將正數與科學記號代表的數互換，比較兩科學記號表示的數之大小。

教學計畫



模組名稱	指數記法與科學記號
授課節數規劃	六節課
學習重點 (內容、概念、能力)	<p>學習內容</p> <p>N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方；時；同底數的大小比較；指數的運算。</p> <p>N-7-8 科學記號：以科學記號表達正數，此數可以是很大的數（次方為正整數），也可以是很小的數（次方為負整數）。</p> <p>學習表現</p> <p>n-IV-3 理解非負整數次方的指數和指數律，應用於質因數分解與科學記號，並能運用到日常生活的情境解決問題。</p> <p>n-IV-9 使用計算機計算比值、複雜的數式、小數或根式等四則運算與三角比的近似值問題，並能理解計算機可能產生誤差。</p> <p>基本學習內容</p> <p>NC-7-6-1 a^n 的意義（n 為非負整數）</p> <p>NC-7-8-1 科學記號表示法。</p>
適用對象	<p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容：</p> <p>N-6-1 20 以內的質數和質因數分解</p> <p>N-7-2 質因數分解的標準分解式</p> <p>N-7-3 負數與數的四則混合運算（含分數、小數）：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。</p>
教學連結建議	<p>本模組與未來學習內容的連結：</p> <p>N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」底數的乘法指數律」$(a^m \times a^n = a^{m+n})$、$(a^m)^n = a^{mn}$、$(a \times b)^n = a^n \times b^n$，其中 m, n 為非負整數；以數字例表示「同底數的除法指數律」$(a^m \div a^n = a^{m-n})$，其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數，$a \neq 0$ 時 $a^n = 1$</p>

學習目標	學習目標
	第 1 節
	一、能理解 a^n 的記法與意義。
	第 2 節
	二、理解整數的乘方如何比大小。
	三、理解含有指數型式的四則混合運算。
	第 3 節
	能理解底數為 10，指數整數時， 10^n 的意義。
	第 4~6 節
	五、能將任一正數以科學記號表示。
	六、能將科學記號與其代表的數互換。
	七、能比較兩個以科學記號所表示的數之大小。
教學材料 教學資源	1. 康軒、翰林及南一版電子書
	康軒電子書： https://webetextbook.knsh.com.tw/2/index.html?code_degree=2
	翰林電子書： https://www.hle.com.tw/inpage02.html
	南一電子書： https://trans.nani.com.tw/TeacherCloud/jteacher/
	2. 網路素材 https://www.youtube.com/watch?v=QHmfXN2s-pA
	3. 自編學習單（如附件 1~3）。
	4. 辛巴威紙幣（如附件 4）。

主題 I：整數的乘方指數記法

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>第 1 節</p> <p>教師提問 1</p> <p>我們以前學過，當相同的數連續相加多次時，可以利用乘法算式來簡記。例如：「$2+2+2+2+2+2$」表示 6 個 2 連加，我們可以記為「2×6」。但是，如果遇到相同的數連續相乘多次時，如 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$，有沒有更簡潔的記錄方式？</p> <p>學生回答</p> <p>直接心算，算出答案。</p> <p>教師提問 2</p> <p>但是，如果要連續相乘的數字很多時，用心算的方式不容易算出答案，該怎麼辦呢？</p>	

教學活動流程設計

教學注意事項

學生回答

可以利用計算機計算。

教師：這個方法似乎也不錯。現在，讓我們先來觀看一個生活中有的例子，

【生活實例 1】



手工拉麵店會由師傅於現場製作麵條。首先師傅將麵團拉成一長條後，對摺、對摺再對摺，一直拉長再對摺，讓這些麵團最後變成細細的麵條。

這些麵條數量的變化，一開始只有一條長長、有點粗的麵團，經過對摺後，麵條的數量會有以下的變化：

1. 對摺 1 次，麵團會變成 2 條，
2. 拉長再對摺第 2 次，會變成 4 條。
3. 拉長再對摺第 3 次，會變成 8 條。

教師提問 3

依此做法繼續製作，若沒有任何麵條斷掉，當師傅對摺第 10 次後，請問他最後能得到多少條麵條呢？要怎麼記錄呢？



【作法】

以計算一條麵團對摺的前 6 次所得到的麵條數量為例，將每次對摺後麵條的數量記錄成以下表格：

此時，教師可與同學討論是否有以下的生活經驗。拉麵麵條製作影片可參考 youtube 影片如：<https://www.youtube.com/watch?v=QHmfxN2s-pA> (17 分 0 秒至 18 分 0 秒)，QRCode 如下



教師也可以自行尋找適合自己教學的相關影片來取代。

請學生記錄「第幾次對摺」、「麵條數量記法」、「麵條數量」三欄即可。而「可紀錄為」及「讀作」此兩欄則由教師上課進行說明後，請學生再行填入。

教學活動流程設計

教學注意事項

第幾次對摺	麵條數量記法	麵條數量	可紀錄為	讀作
	1	1	1	1
1	2	2	2^1	2的1次方
2	2×2	4	2^2	2的2次方

學生回答

師傅可製作出 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 512$ 條麵條，記錄為 2^9 條。

教師提問 4

為什麼只有將 2 連續乘 9 次呢？

學生回答

因為原先只有一條麵條，所以只算 9 次。

教師提問 5

請同學重新觀察上面表格，數一數，第 10 次對摺後，應該是 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ，共有 10 個 2 相乘。此時我們可以記錄為多少呢？

學生回答

2^{10}

【生活實例 2】

將同學 2 ~ 4 人分成一組，並發給每人一張 A4 紙張。請小組討論：這張紙最多可以摺成幾張紙？（或是最多可對摺幾次）？，並將做法紀錄在表格中。

第幾次對摺	紙張數量記法	紙張張數	可紀錄為	讀作
	1	1	1	1
1	2	2	2^1	2的1次方
2	2×2	4	2^2	2的2次方

請教師留意，學生此時或許無法立刻以正確的整數的乘方之記法來表示，建議教師適時提供協助與給予澄清。

在紙張準備方面，教師可準備依取得的方便 A4、B4、A3 大小的紙張、報紙、全開壁報紙、甚至國畫用的宣紙…等，讓學生有多元嘗試的機會。

教師也可讓學生觀看網路上關於「將一張紙對摺」的影片，參考連結網址：https://www.youtube.com/watch?v=r3_k6mG-PU。

QRCode



教師也可自行尋找適合自己教學的影片替代之。

教學活動流程設計

教學注意事項

教師提問 6

請各組動手操作並討論，一張紙最多可以對摺多少次？



學生回答

6 次、7 次。

教師提問 7

我們再來比較影片中拉麵對摺的次數和紙張對摺的次數，拉麵對摺的似乎比較多次，但紙張對摺的次數似乎只停在某個次數上。想一想，紙張對摺的次數是否和紙張的大小、材質有關？還是和摺法或力氣大小有關？說說看你的想法是什麼？

學生回答

和紙張的大小、厚薄有些關係。

教師提問 8

請對照拉麵對摺與紙張對摺後所紀錄的結果，兩者是否有相似的地方？說說看你的看法是什麼？

第幾次對摺	麵條數量記法	麵條數量	可紀錄為	讀作
	1	1	1	1
1	2	2	2^1	2的1次方
2	2×2	4	2^2	2的2次方
3	$2 \times 2 \times 2$	8	2^3	2的3次方
4	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	16	2^4	2的4次方
5	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	32	2^5	2的5次方
6	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	64	2^6	2的6次方

第幾次對摺	紙張數量記法	紙張張數	可紀錄為	讀作
	1	1	1	1
1	2	2	2^1	2的1次方
2	2×2	4	2^2	2的2次方
3	$2 \times 2 \times 2$	8	2^3	2的3次方
4	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	16	2^4	2的4次方
5	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	32	2^5	2的5次方
6	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	64	2^6	2的6次方

建議教師提醒學生有關指數的寫法，指數是寫於底數的右上角；如果寫於右下方則稱為「足碼」，並非指數的意思。請特別說明：負數的乘方表示法要保留括號；若沒有括號會影響其數值的運算結果。

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>學生回答</p> <p>兩個表格最後紀錄完成的結果很相似。對摺 1 次時，數量都是 2；對摺 2 次時，數量都是 4；對摺 3 次時，數量都是 8；對摺 4 次時，數量都是 16。所以，只要知道對摺幾次，就能知道麵條數量 or 紙張數量都可表示成 2 的乘方次。</p> <p>【總結】</p> <p>當我們遇到同一個數字連乘時，可以用以下的方式來表示：</p> <div data-bbox="330 822 841 1068" data-label="Equation-Block"> $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{10} = 1024$ <p style="text-align: center;">10個2相乘 底數 指數</p> </div> <p>教師說明</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) 連續相乘的數字叫「底數」；連續相乘的次數叫「指數」，記錄在「底數」的「右上方」。 (2) 10 個 2 相乘，讀作「2 的 10 次方」，記作 2^{10}，代表 2 這個數字自乘 10 次。 (3) 通常，1 次方的「1」可省略不寫，記成 2^1 或 2。 (4) $2^{10} = 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$，表示有 10 個 2 相乘其數值為 1024。 (5) 負整數相乘同樣也可以利用這種指數型式的記錄方式，但是，必須要保留括號。例如 $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^5$。如果省略括號時會產生什麼問題嗎？當大家完成指數形式的記法練習後，我們再針對此題進行討論。 <p>練習 1</p> <p>以指數的形式簡記下列各式。</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) $8 \times 8 \times 8 =$ _____ (唸作__的__次方) (2) $3 \times 3 \times 3 \times 3 =$ _____ (唸作__的__次方) (3) $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 =$ _____ (唸作__的__次方) 	


教學活動流程設計	教學注意事項
<p>練習 2</p> <p>計算下列各題的答案。</p> <p>(1) $2^6 =$ _____ (4) $(-2)^3 =$ _____</p> <p>(2) $4^3 =$ _____ (5) $1^{300} =$ _____</p> <p>(3) $5^3 =$ _____ (6) $0^{2021} =$ _____</p> <p>第 2 節</p> <p>教師提問 1</p> <p>負整數相乘時，若要寫成負整數的乘方或是以指數型式的記法時括號需保留著。這是為什麼呢？請同學思考以下兩道題：</p> <p>(1) -2^2 和 $(-2)^2$ 答案相同嗎？</p> <p>(2) -2^3 和 $(-2)^3$ 答案相同嗎？</p> <p>學生回答</p> <p>(1) $-2^2 = -(2^2) = -(2 \times 2) = -4$ $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$ 因此，-2^2 和 $(-2)^2$ 兩者的答案不相同。</p> <p>(2) $-2^3 = -(2^3) = -(2 \times 2 \times 2) = -8$ $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ 因此，-2^3 和 $(-2)^3$ 兩者的答案相同。</p> <p>教師提問 2</p> <p>想一想，為什麼同一個負數 (-2) 連乘 2 次，有括號和沒括號的答案不同；而 (-2) 連乘 3 次時，有括號和沒括號答案卻相同。這是巧合？還是與乘方有關呢？我們再看看下面 2 道題。</p> <p>(3) -2^4 和 $(-2)^4$ 答案相同嗎？</p> <p>(4) -2^5 和 $(-2)^5$ 答案相同嗎？</p> <p>學生回答</p> <p>(3) $-2^4 = -(2^4) = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$ $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$ 因此，-2^4 和 $(-2)^4$ 兩者的答案不相同。</p> <p>(4) $-2^5 = -(2^5) = -(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = -32$ $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$ 因此，-2^5 和 $(-2)^5$ 兩者的答案相同。</p>	<p>-2^2 和 $(-2)^2$ 與 -2^3 和 $(-2)^3$ 這兩組題目答案有差異是學生學這個單元時最容易出現的錯誤與迷思，因此教師在進行這些提問時，可給予學生計算與討論的時間。</p>

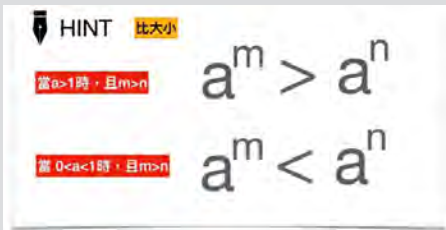
教學活動流程設計	教學注意事項
<p>教師提問 3</p> <p>請問，是否有同學發現造成上面兩道題答案有差異的原因是什麼了嗎？</p> <p>學生回答</p> <p>造成答案有差異的原因有：第 1 個原因是「偶數」個負數相乘，或是「奇數」個負數相乘。</p> <p>第 2 個原因是有沒有括號出現。</p> <p>教師提問 4</p> <p>請觀察並比較 -2^4 與 $(-2)^4$ 兩數的表示法的差異。</p> <p>學生回答</p> <p>-2^4 代表先將 2 自乘 4 次，得到答案後再加上一個負號。因此，-2^4 的答案是負數。而 $(-2)^4$ 的意思是將 (-2) 自乘 4 次，所以，得到的答案是正數。</p> <p>教師說明</p> <p>像 -2^4 這類在「指數前面加上負號」的問題，同學們常混淆運算的順序。其實，-2^4 是省略了 $(-2)^4$ 的一個括號。我們習慣將 $-(4^2)$ 的括號省略記為 -4^2，因此，在計算 -4^2 時，次方的計算優先於負號。所以，同學們如果害怕混淆運算的順序，在解類似 -4^2 問題時，可將括號先行補上，將 -4^2 寫成 $-(4^2)$，便不容易再混淆運算順序。</p>	<p>學生是否能理解 -2^4 代表先將 2 自乘 4 次，得到答案後再加上一個負號。也就是省略了括號。這是理解 -2^4 意義的重要關鍵。</p> <div data-bbox="948 916 1374 1135"> </div>
<p>練習 1</p> <p>計算下列各題的答案。</p> <p>(1) $-3^4 =$ _____</p> <p>(2) $(-3)^4 =$ _____</p> <p>(3) $-5^3 =$ _____</p> <p>(4) $(-5)^3 =$ _____</p> <p>教師提問 5</p> <p>想一想，利用指數的記法來表示數的連續相乘，只能用於整數相乘？若當有許多相同的分數連續相乘時，還能利用這種記法表示嗎？</p> <p>例如：$(\frac{2}{3}) \times (\frac{2}{3}) \times (\frac{2}{3}) \times (\frac{2}{3})$，是否能利用指數的記法表示？</p>	

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>學生回答</p> <p>可以。因為依指數的記法的意義</p> $\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^4$ <p>教師提問 6</p> <p>求 $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ 之值。</p> <p>學生回答</p> $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{16}{81}$ <p>教師提問 7</p> <p>$\left(\frac{2}{3}\right)^4$ 與 $\frac{2^4}{3^4}$ 兩者的答案是否相同？</p> <p>學生回答</p> $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$ <p>分子 $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 可表示為 2^4、分母 $3 \times 3 \times 3 \times 3$ 可表示為 3^4</p> <p>所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$</p>	<p>將分數連續相乘後，以指數的形式記錄來表示，也是一項重要的能力，建議教師以提問的方式逐步引導理解。</p>
<p>練習 2</p> <p>計算下列各題的答案。</p> <p>(1) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 =$ _____</p> <p>(2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$ _____</p> <p>第 3 節</p> <p>前 2 節課，我們已學會整數、分數的指數形式的記法，也學會數的乘方的方法。本節課將介紹含有指數的整數要如何進行四則混合運算。</p> <p>教師提問 1</p> <p>計算 $(-3^2 + 2^4) \times 4^2$ 之值。</p> <p>學生回答</p> $(-3^2 + 2^4) \times 4^2 = (-9 + 16) \times 16 = 7 \times 16 = 112$ <p>教師提問 2</p> <p>要計算 $(-3^2 + 2^4) \times 4^2 = ?$ 時，下列那一個步驟的作法有錯誤？</p>	


含有指數的整數之四則混合運算是學生經常出現錯誤的運算技能之一。

教學活動流程設計	教學注意事項
<p> $(-3^2+2^4)\times 4^2=-3^2+2^4\times 4^2$----- 步驟 1 $=-9+16\times 16$--- 步驟 2 $=-9+256$ ----- 步驟 3 $=247$ </p> <p>學生回答</p> <p>步驟 1 就錯了。</p> <p>要先計算括號內的運算，而不是先計算 $2^4\times 4^2$。</p> <p>教師提問 3</p> <p>這類有關整數乘方之四則運算題目，有哪些應注意的哪重點？這些重點的順序是如何？</p> <p>學生回答</p> <p>(1) 題目有括號時，括號內的算式要先算。</p> <p>(2) 若出現有指數記法的數字時，要先計算。</p> <p>(3) 遇到有乘除和加減運算的題目時，要先處理乘除後再處理加減。</p> <p>(4) 由左而右。</p> <p>練習 1</p> <p>求下列各題的答案。</p> <p>(1) $-5^2\div 5+3^2=?$</p> <p>(2) $(-45)\div (-3)^2+60=?$</p> <p>(3) $-2^4+(-2)^3\div 4=?$</p> <p>經過以上有關整數乘方的四則運算介紹後，同學們已經建立以下三項有關四則運算技能與規則：</p> <p>(1) 以指數的記法來表示整數或分數連續相乘的結果。</p> <p>(2) 負數連續相乘後，答案有分為「有括號」與「無括號」兩種。</p> <p>(3) 理解如何進行數的乘方的四則運算。</p> <p>教師提問 4</p> <p>接下來，請同學想一想：將某個正數連續相乘很多次之後，答案是否「愈乘愈大」；有可能「越乘越小」的結果嗎？</p>	<p>首先容易出現錯誤的地方是否含有括號的數的乘方之計算；其次，是學生對於運算順序的約定不熟悉。建議教師可先舉一些例子，讓學生理解這些運算的約定。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>學生回答</p> <p>一定是「愈乘愈大」，不可能出現「愈乘愈小」的結果。</p> <p>教師回饋</p> <p>同學們對這題答案很有信心。接下來，讓我們用計算機來驗證一下答案果真如此？</p> <p>探索活動</p> <p>教師提問 5</p> <p>請同學任意決定寫出一個大於 1，且小於 20 的數字 a，利用計算機求 a^6、a^7、a^8 的值，並比較 a^6、a^7、a^8 三個數的大小關係。</p> <p>學生回答</p> <p>(1) 比較 5^6、5^7、5^8 三數的大小</p> $5^6 = 15625 \quad 5^7 = 78125 \quad 5^8 = 390625$ <p>因為 $15625 < 78125 < 390625$</p> <p>所以 $5^6 < 5^7 < 5^8$，也就是說 $a^6 < a^7 < a^8$</p> <p>(2) 比較 8^6、8^7、8^8 三數的大小</p> $8^6 = 262144 \quad 8^7 = 2097152 \quad 8^8 = 16777216$ <p>因為 $262144 < 2097152 < 16777216$</p> <p>所以 $8^6 < 8^7 < 8^8$，也就是說 $a^6 < a^7 < a^8$</p> <p>教師總結：某個大於 1 的正數連續相乘很多次後，答案會愈乘愈大。</p> <p>教師提問 6</p> <p>再請同學決定一個大於 0 且小於 1 的數字 a，利用計算機求出 a^6、a^7、a^8 的值，並比較 a^6、a^7、a^8 三個數的大小關係。</p> <p>學生回答</p> <p>(1) 比較 0.1^6、0.1^7、0.1^8 三數的大小</p> $0.1^6 = 0.000001 \quad 0.1^7 = 0.0000001 \quad 0.1^8 = 0.00000001$ <p>因為 $0.000001 > 0.0000001 > 0.00000001$</p> <p>所以 $0.1^6 > 0.1^7 > 0.1^8$，也就是說 $a^6 > a^7 > a^8$</p> <p>(2) 比較 0.9^6、0.9^7、0.9^8 三數的大小</p> $0.9^6 = 0.531441 \quad 0.9^7 = 0.4782969 \quad 0.9^8 = 0.43046721$	<p>請同學準備一台計算機或具備計算機功能的手機。本活動可以個人操作的方式進行，也可以利用分組的方式進行。</p> <p>教師應於課前提醒同學攜帶計算機或具備計算機功能的手機前來上課，以利課程的進行；老師也可考慮準備公用的計算機。</p> <p>若多數學生忘記攜帶計算機或手機，建議教師將底數變小，以利同學直接在紙張上進行計算；也可調整全班出題，由部分的代表按計算機算出答案，再讓全班一起討論數字大小的比較。</p> <p>要乘出一個含有次方的數字，學生除了直接自乘數次之外，教導學生學會按計算機上的 x^y 鍵也是一種可行的方式。通常工程用的計算機或將 iPhone 手機橫擺就會出現 x^y 鍵。</p> 

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>因為 $0.531441 > 0.4782969 > 0.43046721$</p> <p>所以 $0.9^6 > 0.9^7 > 0.9^8$，也就是說 $a^6 > a^7 > a^8$</p> <p>教師總結</p> <p>某個正數大於 0 且小於 1 的正數連續相乘很多次後，答案會愈乘愈小。</p> <p>教師提問 7</p> <p>接下來，請同學將 a 換成 1 或 -1 兩個數，結果會是如何？</p> <p>學生回答</p> <p>(1) 將 a 換成 1</p> <p>$1^6 \cdot 1^7 \cdot 1^8 \Rightarrow 1^6 = 1^7 = 1^8 = 1$ 三個數相等。</p> <p>(2) 將 a 換成 -1</p> <p>$(-1)^6 \cdot (-1)^7 \cdot (-1)^8 \Rightarrow (-1)^6 = 1 \cdot (-1)^7 = -1 \cdot (-1)^8 = 1$</p> <p>答案有正有負。因此，無法比較大小</p> <p>教師總結</p> <p>(1) 當數字大於 1 時，這個數自乘次數越多，其值越大。</p> <p>(2) 當數字等於 1 時，這個數自乘的值等於 1。</p> <p>(3) 當數字是大於 0 且小於 1 時，這個數自乘次數越多，其值越小。</p>	

主題 II：10 的次方與位值

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>第 4 節</p> <p>教師提問 1</p> <p>老師手上這張紙鈔是辛巴威這個國家曾經使用的錢幣，請觀察並說出它的幣值是多少？</p> <p>學生回答</p> <p>一百億</p> <p>教師提問 2</p> <p>3500000000 該讀作什麼呢？</p>	<p>本節課的材料是以生活實例來增加學生對指數意義的感覺。由於舊辛巴威紙鈔的幣值相當大，所以會讓學生感到很驚奇。附錄中，附上幾張紙鈔的圖片，教師可列印出來展示或讓學生傳閱。</p> <p>舊辛巴威紙鈔圖例：</p> 

教學活動流程設計

教學注意事項

學生回答

三十五億

十億	億	千萬	百萬	十萬	萬	千	百	十	個
3	5	0	0	0	0	0	0	0	0

教師提問 3

請觀察下列表格，並在空格中填入適當的算式或簡記的符號：

中文意義	算式	簡記符號
百萬		10^6
十萬		10^5
萬	$10 \times 10 \times 10 \times 10$	
千	$10 \times 10 \times 10$	
百	10×10	
十	10	10^1
一	1	
零點一	$\frac{1}{10}$	10^{-1}
零點零一	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$	
零點零零一	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$	
零點零零零一		10^{-4}

如果同學不確定答案。建議教師利用國小學過的定位板，幫助學生解題。

教師總結

由上表的觀察我們可以發現，不同位名所代表的數值呈現 10 倍或 $\frac{1}{10}$ 的關係：

往上一位時，其代表的數值大小會逐漸以 10 倍的規律變大；相反的，往下一位時，其代表的數值大小會逐漸以 $\frac{1}{10}$ 倍的規律變小，也就是變成原來的十分之一。



中文意義	算式	簡記
百萬位	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^6
十萬位	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^5
萬位	$10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^4
千位	$10 \times 10 \times 10$	10^3
百位	10×10	10^2
十位	10	10^1
個位	1	10^0
十分位	$\frac{1}{10} = 0.1$	10^{-1}
百分位	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 0.01$	10^{-2}
千分位	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 0.001$	10^{-3}
萬分位	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 0.0001$	10^{-4}

因此，我們得到以下幾個結論：

〔結論 1〕 $(0.1)^m = 10^{-m}$

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>〔結論 2〕 $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ 其中 m 為正整數</p> <p>〔結論 3〕 $a^0 = 1$ 其中 $a \neq 0$</p> <p>練習 1</p> <p>(1) 以 10 為底數的指數記法來表示小數 0.000000001。</p> <p>(2) 以小數的形式來表示 $\frac{1}{10^6}$</p>	

主題 III：科學記號

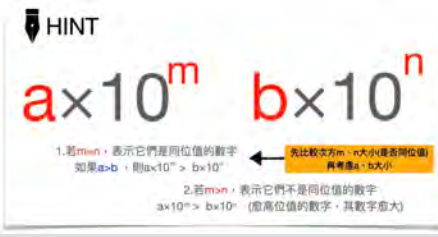
教學活動流程設計	教學注意事項
<p>第 5~6 節</p> <p>老師拿出其他幣值的舊辛巴威紙鈔</p> <p>教師提問 1</p> <p>(1) 這張紙幣的幣值大小是多少？要怎麼讀它呢？</p> <p>(2) 可以用「10 的次方」的形式來表示這張紙幣幣值的大小嗎？</p> <p>學生回答【第一張紙幣】</p> <p>(1) 10 億 (十億)</p> <p>(2) 10^9</p> <p>學生回答【第二張紙幣】</p> <p>(3) 500 億 (五百億)</p> <p>(4) 5×10^{10}</p> <p>日常生活中還有很多關於數字很大的事件。除了上一個活動介紹的辛巴幣之外，我們再來看一些出現在媒體報導的例子。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 20px;"> <p>美國國家航空暨太空總署 (NASA) 的火星探測車「毅力號」(Perseverance) 在發射升空 7 個月後，以自動駕駛成功地登陸火星。NASA 指出，毅力號造價 27 億美元，是 NASA 有史以來花費金額最巨大且最自主的太空探測器。它是在美西時間 2021 年 2 月 19 日中午 12 時 55 分成功降落在火星最嚴峻的位置。</p> </div>	<p>本節課的材料是以生活中的外國錢幣實例，利用幣值很大的辛巴威錢幣引入科學記號。第一張錢幣是前面已經出現的舊辛巴威紙鈔，本模組的附錄有附上這幾張紙鈔的圖例，可列印出來展示或讓學生傳閱。</p> <p>【第一張紙幣】</p>  <p>【第二張紙幣】</p>  <p>在 108 課綱中，我們不處理科學記號的運算，只著重科學記號的理解與使用。例如：1 奈米等於 10^{-9} 公尺；其中，數字含有負數次方的部分，可以利用小數轉換來解釋這個數的大小，不宜牽涉到其他底數的負數次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項																																																												
<p>教師提問 2</p> <p>請問：這臺造價 27 億美元的「火星探測車」毅力號折合成新臺幣約為多少元呢（1 美元約等於新臺幣 30 元）？</p> <p>學生回答</p> <p>因為 1 美元約等於新臺幣 30 元，所以，27 億美元約等於新臺幣 $30 \times 27000000000 = 810000000000$（元），讀作八百一十億元。</p> <table><tr><td>百億</td><td>十億</td><td>億</td><td>千萬</td><td>百萬</td><td>十萬</td><td>萬</td><td>千</td><td>百</td><td>十</td><td>個</td></tr><tr><td>8</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> <p>教師提問 3</p> <p>接下來，老師請問同學：地球和火星之間的平均距離有多遠？由於地球與火星都繞著太陽公轉，所以，兩星球的距離不是固定的。根據天文學家公布的數據，地球與火星最近的距離約為 5600 萬公里；而兩星球最遠的距離約 4.01 億公里，平均距離約為 2.285 億公里。請問：將 2.285 億這個數字寫在定位板上，它可以怎麼表示呢？</p> <p>學生回答</p> <table><tr><td>億</td><td>千萬</td><td>百萬</td><td>十萬</td><td>萬</td><td>千</td><td>百</td><td>十</td><td>個</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>8</td><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> <p>教師提問 4</p> <p>臺灣製造半導體的公司—台灣積體電路製造（簡稱台積電），在 2020 年幫 Apple 公司製作 A14 Bionic 晶片，是全球首款 5 奈米製程的晶片。其中，「奈米」是長度單位，1 奈米是 0.000000001 公尺。請問：5 奈米的長度是多少，請將這個數字寫在定位板上。</p> <p>學生回答</p> <p>5 奈米 = 5×0.000000001 公尺 = 0.000000005 (公尺)</p> <table><tr><td>個位</td><td>十分</td><td>百分</td><td>千分</td><td>萬分</td><td>十萬分</td><td>百萬分</td><td>千萬分</td><td>億分</td><td>十億分</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td></tr></table>	百億	十億	億	千萬	百萬	十萬	萬	千	百	十	個	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	億	千萬	百萬	十萬	萬	千	百	十	個	2	2	8	5	0	0	0	0	0	個位	十分	百分	千分	萬分	十萬分	百萬分	千萬分	億分	十億分	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	<p>為了達成科學記號的了解與使用，本教材運用不同生活領域的實例，例如：大面額的紙幣、晶元製程、NASA 的火星探測車、空氣品質的問題…等問題。教師可視學生的經驗與接受程度，自行選取適合的例子進行的介紹，讓學生能感受科學記號在生活中的應用，進行體會學習科學記號的重要性。</p>
百億	十億	億	千萬	百萬	十萬	萬	千	百	十	個																																																			
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																			
億	千萬	百萬	十萬	萬	千	百	十	個																																																					
2	2	8	5	0	0	0	0	0																																																					
個位	十分	百分	千分	萬分	十萬分	百萬分	千萬分	億分	十億分																																																				
0	0	0	0	0	0	0	0	0	5																																																				

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>教師總結</p> <p>奈米在科技業中，是常見的長度單位。1 奈米是 0.000000001 公尺，但是這究竟有多小呢？以每個人的指甲為例，1 奈米的長度大小大約等於一片指甲厚度的十萬分之一。同學們是否較能感覺、想像它的細微？!</p> <p>教師提問 5</p> <p>所謂空氣品質指標 (AQI) 指的是依據監測資料將當日空氣中懸浮微粒 (PM_{2.5}) (細微粒的粒徑在 2.5 微米以下)、懸浮微粒 (PM₁₀) (細微粒的粒徑在 10 微米以下)、二氧化硫 (SO₂)、一氧化碳 (CO) 及臭氧 (O₃)、二氧化氮 (NO₂)、濃度等數值，以其對人體健康的影響程度，分別換算出不同污染物之副指標值，再以當日各副指標值的最大值作為該監測站當日之空氣品質指標值 (AQI)。</p> <p>臭氧是 (O₃) 是空氣品質指標 (AQI) 中的一個污染源，它的測量單位是 ppm 或是 ppb。ppm 是 part(s) per million (百萬分之一，$1/10^6$) 的縮寫；而 ppb 意思是十億分之一 ($1/10^9$)，(源自英語 parts per billion，簡稱 ppb)。</p> <p>如果某日的臭氧濃度為每小時平均值是 150ppb，請問，它代表的數字是多少呢？</p> <p>學生回答</p> <p>因為 1ppb 是十億分之一 ($1/10^9$)=0.000000001，所以，$150\text{ppb}=15 \times 0.000000001=0.00000015$</p> <p>教師提問 6</p> <p>上面所舉生活中的例子，有的例子是數字很大；有的卻是很小。有沒有什麼數字的表示形式能簡化這些很大或很小的數呢？</p> <p>右圖辛巴威紙幣是 50000000000，請問，50000000000 可以用 10 的次方來表示嗎？</p> <p>學生回答</p> <p>因為 $100000000000=10^{10}$ 所以 $50000000000=5 \times 10000000000$ $=5 \times 10^{10}$</p>	<p>以舊辛巴威紙幣 50000000000 為例</p> 

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>教師總結</p> <p>(1) 辛巴幣 1 張 10 億元的紙幣，可以表示成 $1000000000=10^9$。</p> <p>(2) 再來看看其他數字的例子：</p> $81000000000=8.1 \times 10000000000=8.1 \times 10^{10}$ $0.000000005=5 \times 0.000000001=5 \times 10^{-9}$ <p>所以我們可以將 81000000000 表示成 8.1×10^{10}；將 0.000000005 表示成 5×10^{-9}。這樣的記法，我們將它們稱為「科學記號」。此處，要特別留意的是，10 的次方前面的倍數一定要大於等於 1 且小於 10。</p> <p>以上面的 81000000000 為例，81000000000 意思是 810 億，也可以表示成 81 個十億或是 8.1 個百億，因為數值採用的是十進位，科學記號的意思是將數字表示成它無法再進位的最大的位值，此時無法再進位的最大的位值是百億，所以我們將 81000000000 表示成 $8.1 \times 10000000000=8.1 \times 10^{10}$</p> <p>練習 1：【將數字化成科學記號】</p> <p>在空格內填入適當的數字</p> <p>(1) $6000000=6 \times 10^{10}$，$\square =$ _____</p> <p>(2) $0.000000008=8 \times 10^{10}$，$\square =$ _____</p> <p>(3) $\frac{4}{100000}=4 \times 10^{-5}$，$\square =$ _____</p> <p>(4) $168000000=1.68 \times 10^8$，$\square =$ _____</p> <p>(5) $0.0000039=3.9 \times 10^6$，$\square =$ _____</p> <p>(6) $0.0002021=2.021 \times 10^4$，$\square =$ _____</p> <p>(7) $\frac{26}{100000}=2.6 \times 10^{-4}$，$\square =$ _____</p> <p>練習 2：【將科學記號轉換成數字的形式】</p> <p>(1) $5 \times 10^8 =$ _____</p> <p>(2) $2.26 \times 10^6 =$ _____</p> <p>(3) $4.8 \times 10^{-5} =$ _____</p> <p>(4) $3.91 \times 10^{-7} =$ _____</p>	<p>教學注意事項</p> <div data-bbox="938 1227 1388 1460"> </div> <p>學生面對將數字改記成科學記號時，經常會出現 $26000=26 \times 10^3$ 或是 $0.0000037=3.7 \times 10^{-5}$ 的錯誤。請教師特別針對這兩類型的錯誤記法加以提醒。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>教師提問 7</p> <p>當我們把兩個數字以科學記號表示後，請透過科學記號瞭解這兩個數字的大小關係為何？</p> <p>(1) 比較 2.26×10^6、4×10^6 的數之大小。</p> <p>(2) 比較 2.26×10^6、4×10^5 的數之大小。</p> <p>(3) 比較 2.26×10^{-3}、4×10^{-4} 的數之大小。</p> <p>(4) 比較 2.26×10^{-4}、1.2×10^{-4} 的數之大小。</p> <p>學生回答</p> <p>(1) 比較 2.26×10^6、4×10^6 的數之大小。</p> <p>【方法 1】將科學記號換回原來的數字再進行比較 $2.26 \times 10^6 = 2260000$，$4 \times 10^6 = 4000000$ 因為 $2.26 \times 10^6 = 2260000 < 4000000 = 4 \times 10^6$ 所以 $2.26 \times 10^6 < 4 \times 10^6$</p> <p>【方法 2】用「數量等級」的概念來進行比較 2.26×10^6、4×10^6 代表它們都是 10^6 位值 (百萬) 的數字，但是 $2.26 < 4$，所以 $2.26 \times 10^6 < 4 \times 10^6$</p> <p>(2) 比較 2.26×10^6、4×10^5 的數之大小。</p> <p>【方法 1】將科學記號換回原來的數字再進行比較 $2.26 \times 10^6 = 2260000$，$4 \times 10^5 = 400000$ 因為 $2.26 \times 10^6 = 2260000 > 400000 = 4 \times 10^5$ 所以 $2.26 \times 10^6 > 4 \times 10^5$</p> <p>【方法 2】用「數量等級」的概念來進行比較 2.26×10^6 代表它是 10^6 位值 (百萬) 的數字 4×10^5 代表它是 10^5 位值 (十萬) 的數字 所以 $2.26 \times 10^6 > 4 \times 10^5$</p> <p>(3) 比較 2.26×10^{-3}、4×10^{-4} 的數之大小。</p> <p>【方法 1】將科學記號換回原來的數字再進行比較 $2.26 \times 10^{-3} = 0.00226$，$4 \times 10^{-4} = 0.0004$ 因為 $2.26 \times 10^{-3} = 0.00226 > 0.0004 = 4 \times 10^{-4}$ 所以 $2.26 \times 10^{-3} > 4 \times 10^{-4}$</p>	<p>數字與科學記號之間的轉換是七年級學習需具備一項能力。建議教師若發現學生在此產生錯誤或困難時，可再回到 10 的次方的表示法，重新說明與教學。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>【方法 2】用「數量等級」的概念來進行比較 2.26×10^{-3} 它是 10^{-3} 位值 (千分位) 的數字 4×10^{-4} 它是 10^{-4} 位值 (萬分位) 的數字 所以 $2.26 \times 10^{-3} > 4 \times 10^{-4}$</p> <p>(4) 比較 2.26×10^{-4}、11.2×10^{-4} 的數之大小。</p> <p>【方法 1】將科學記號換回原來的數字再進行比較 $2.26 \times 10^{-4} = 0.000226$，$1.2 \times 10^{-4} = 0.00012$ 因為 $2.26 \times 10^{-4} = 0.000226 > 0.00012 = 1.2 \times 10^{-4}$ 所以 $2.26 \times 10^{-4} > 1.2 \times 10^{-4}$</p> <p>【方法 2】用「數量等級」的概念來進行比較 2.26×10^{-4}、1.2×10^{-4} 代表它們都是 10^{-4} 位值 (萬分位) 的數字，但是 $2.26 > 1.2$ 所以 $2.26 \times 10^{-4} > 1.2 \times 10^{-4}$</p>	<p>讓學生感受到科學記號可以進行「數量等級」的比較，是一件重要的工作，因為，當兩個很大的數字都已表示成無法再進位的最大的位值時，瞭解是否在「同一個量級」進行比較，可以讓我們容易地比較兩個或多個數字的大小。</p>
<p>練習 3</p> <p>比較以下兩個以科學記號所表示的數之大小</p> <p>(1) 3.33×10^5、4.44×10^4</p> <p>(2) 5.1×10^{-4}、1.92×10^{-4}</p>	
<p>附件</p>	<ul style="list-style-type: none"> 附件 1~3：自編學習單。 附件 4：前測卷。 附件 5：後測卷。 附件 6：舊辛巴威紙幣的圖例。



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

評量工具



本補強課程模組所使用的評量工具包含：

- (一) 理解學生概念學習狀況的課堂教師提問。
- (二) 分析學生學習前、後學習效果的前、後測。
- (三) 測驗學生主題單元概念的運算熟悉程度的附件：學習單。

針對上述評量工具，說明工具內涵如下：

一、評量工具（一）：教師提問

提問位置 主題 - 節 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 I-1-1	我們以前學過當相同的數連續相加多次時，可以利用乘法算式來簡記。例如：「 $2+2+2+2+2+2$ 」表示 6 個 2 連加，我們可以記為「 2×6 」。但是，如果遇到相同的數連乘，例如 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ，有沒有更簡潔的記錄方式？	拉麵的影片 學習單一 (附件一)
主題 I-1-2	但是，如果要連續相乘的數字很多時，用心算的方式不容易算出答案，該怎麼辦呢？	
主題 I-1-3	當師傅對摺第 10 次後，請問他最後能得到多少條麵條呢，要怎麼紀錄呢？	
主題 I-1-4	為什麼只有將 2 連續乘以 9 次呢？	
主題 I-1-5	請同學重新觀察上面表格數一數，第 10 次對摺後，應該是 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ，共有 10 個 2 相乘，此時，我們可以記錄為多少呢？	
主題 I-1-6	請各組動手操作並討論，一張紙最多可以對摺多少次？	一般的紙張 學習單一 (附件一)
主題 I-1-7	影片中拉麵對摺的次數和紙張對摺的次數，拉麵對摺的次數似乎比較多，但紙張有停留在某個次數上。想一想，紙張對摺的次數是否和紙張大小、材質有關？還是和摺法或力氣大小有關？說說你的想法是什麼？	學習單一 (附件一)
主題 I-1-8	請對照拉麵對摺與紙張對摺後所紀錄的結果，兩者是否有相似的地方？說說看，你的看法是什麼？	

提問位置 主題 - 節 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 I-2-1	負整數相乘時，若要寫成負整數的乘方以指數的型式記法時，括號留著是為什麼呢？請同學思考以下兩題： (1) -2^2 和 $(-2)^2$ 答案相同嗎？ (2) -2^3 和 $(-2)^3$ 答案相同嗎？	學習單一 (附件一)
主題 I-2-2	想一想，為什麼同一個負數 (-2) 連乘 2 次，有括號和沒括號答案不同；而連乘 3 次時，有括號與沒括號答案卻相同。這是巧合，還是與乘方有關呢？再看看下面 2 道題。 (3) -2^4 和 $(-2)^4$ 答案相同嗎？ (4) -2^5 和 $(-2)^5$ 答案相同嗎？	
主題 I-2-3	請問，是否有同學發現造成上面兩道題答案有差異的原因是什麼了嗎？	
主題 I-2-4	請觀察並比較 -2^4 與 $(-2)^4$ 兩數表示法的差異？	
主題 I-2-5	利用指數的記法來表示數的連續相乘，只能用於整數相乘？若有許多相同的分數連續相乘時，還能利用這種記法來表示嗎？ 例如： $(\frac{2}{3}) \times (\frac{2}{3}) \times (\frac{2}{3}) \times (\frac{2}{3})$ ，是否能利用指數的記法表示？	
主題 I-2-6	求 $(\frac{2}{3})^4$ 之值。	
主題 I-2-7	$(\frac{2}{3})^4$ 與 $\frac{2^4}{3^4}$ 兩者的答案是否相同？	
主題 I-3-1	計算 $(-3^2 + 2^4) \times 4^2$ 之值。	
主題 I-3-2	要計算 $(-3^2 + 2^4) \times 4^2 = ?$ 時，下列哪一個步驟的作法有錯誤？ $(-3^2 + 2^4) \times 4^2 = -3^2 + 2^4 \times 4^2$ ----- 步驟 1 $= -9 + 16 \times 16$ ---- 步驟 2 $= -9 + 256$ ----- 步驟 3 $= 247$	
主題 I-3-3	這類含有整數的乘方四則運算題目，有哪些應注意的重點？這些重點的順序為何？	
主題 I-3-4	接下來，請同學想一想，將某個正數連續相乘很多次後，答案是否「愈乘愈大」？有可能出現「愈乘愈小」的結果嗎？	

提問位置 主題 - 節 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 I-3-5	請同學任意決定一個大於 1 且小於 20 的數字 a ，利用計算機求出 a^6 、 a^7 、 a^8 的值，並比較 a^6 、 a^7 、 a^8 三數的大小。	學習單一 (附件一)
主題 I-3-6	再請同學決定一個大於 0 且小於 1 的數字 a ，利用計算機求出 a^6 、 a^7 、 a^8 的值，並比較 a^6 、 a^7 、 a^8 三個數的大小。	
主題 I-3-7	接下來，請同學將 a 換成 1 或 -1 兩個數結果是怎麼呢？	
主題 II-4-1	老師手上這張紙鈔是辛巴威這個國家的錢幣，請觀察並說出它的幣值是多少？	 學習單二 (附件二)
主題 II-4-2	35000000000 該讀作什麼呢？	
主題 II-4-3	觀察下列表格，並在空格中填入適當的算式或簡記的符號：	
主題 III-5-6-1	(1) 這張紙幣的幣值大小是多少，要怎麼讀它呢？ (2) 同學們可以用「10 的次方」的形式來表示這張紙幣幣值的大小嗎？	 
主題 III-5-6-2	已知 1 美元約折合臺幣 30 元，請問：這臺造價 27 億美元的「火星探測車」毅力號約折合成新臺幣多少元呢（1 美元約等於新台幣 30 元）？	學習單三 (附件三)
主題 III-5-6-3	接下來，老師請問同學：知道地球和火星之間的平均距離有多遠？由於地球與火星都繞著太陽公轉，所以，兩星球的距離不是固定的。根據天文學家公佈的數據，地球與火星最近的距離約為 5600 萬公里；而兩星球最遠的距離約 4.01 億公里，平均距離約為 2.285 億公里。請問：將 2.285 億這個數字寫在定位板上，它可以怎麼表示呢？	
主題 III-5-6-4	臺灣製造半導體的公司 -- 台灣積體電路製造（簡稱台積電），在 2020 年幫 Apple 公司製作 A14 Bionic 晶片，是全球首款 5 奈米製程的晶片。其中，「奈米」是長度單位，1 奈米是 0.000000001 公尺。請問：5 奈米的長度是多少？請將這個數字寫在定位板上。	

提問位置 主題 - 節 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 III-5-6-5	如果某日的臭氧濃度為每小時平均值是 150ppb，請問，它代表的數字是多少呢？	學習單三
主題 III-5-6-6	上面生活中所舉的例子，有的例子是數字很大，有的卻是數字很小。有沒有什麼數字的表示型式能夠簡化這些很大或很小的數呢？ 右圖辛巴威紙幣是 50000000000，請問 50000000000 可以用 10 的次方來表示嗎？	
主題 III-5-6-7	當我們把兩個數字以科學記號表示之後，請透過科學記號瞭解這兩個數字的大小關係為何？ (1) 比較 2.26×10^6 、 4×10^6 的數之大小。 (2) 比較 2.26×10^6 、 4×10^5 的數之大小。 (3) 比較 2.26×10^{-3} 、 4×10^{-4} 的數之大小。 (4) 比較 2.26×10^{-4} 、 1.2×10^{-4} 的數之大小。	

二、評量工具（二）：前測、後測

（一）前測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	(1) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ _____ (唸作 _____ 的 _____ 次方) (2) $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) =$ _____ (唸作 _____ 的 _____ 次方)	進行教學前
	N-7-6 指數的意義	
第 2 大題	(1) $2^4 =$ _____ (2) $(-3)^2 =$ _____ (3) $-4^3 =$ _____ (4) $(-\frac{2}{3})^4 =$ _____	
	N-7-6 指數的意義	
第 3 大題	(1) 4^{10} 、 4^{50} 、 4^{100} _____ > _____ > _____ (2) $(\frac{1}{4})^{20}$ 、 $(\frac{1}{4})^{40}$ 、 $(\frac{1}{4})^{60}$ _____ > _____ > _____	
	N-7-6 指數的意義	
第 4 大題	(1) $-5^2 + 5 \times 3^2 = ?$ (2) $(-27) \div (-3)^2 - 10 = ?$	
	N-7-6 指數的意義	

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 5 大題	將下列數字以科學記號表示 (1) 7000000=_____	進行教學前
	(2) 0.000009=_____	
	N-7-8 科學記號	
第 6 大題	比較以下兩個科學記號的大小 (1) 3.33×10^5 、 4.44×10^4 _____ > _____	
	(2) 5.1×10^{-4} 、 1.92×10^{-4} _____ > _____	
	N-7-8 科學記號	

(二) 後測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	(1) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 =$ _____ (唸作 _____ 的 _____ 次方)	可於第 1 節 課後實施
	(2) $(-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) =$ _____ (唸作 _____ 的 _____ 次方)	
	N-7-6 指數的意義	
第 2 大題	(1) $-3^4 =$ _____ (2) $(-4)^2 =$ _____	可於第 2 節 課後實施
	(3) $-2^3 =$ _____ (4) $(-\frac{3}{4})^2 =$ _____	
	N-7-6 指數的意義	
第 3 大題	(1) $(\frac{1}{3})^{16} > (\frac{1}{3})^{15} > (\frac{1}{3})^{14}$ _____ > _____ > _____	可於第 3 節 課後實施
	(2) 18^{20} 、 18^{21} 、 18^{22} _____ > _____ > _____	
	N-7-6 指數的意義	
第 4 大題	(1) $(2^3 + 4^3) \times 4^2 = ?$	可於第 3 節 課後實施
	(2) $20 + (-81) \div (-3) = ?$	
	N-7-6 指數的意義	
第 5 大題	將下列數字以科學記號表示 (1) 4560000=_____	可於第 6 節 課後實施
	(2) 0.000226=_____	
	N-7-8 科學記號	

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 6 大題	比較以下兩個科學記號的大小 (1) 2.21×10^6 、 4.9×10^5 _____ > _____ (2) 6.5×10^{-8} 、 2.3×10^{-6} _____ > _____	可於第 6 節 課後實施
	N-7-8 科學記號	

教學反思 應用建議



鑑於指數記法（指數律）與科學記號在學習扶助的測驗結果中，通過率大約只有 4 成，此結果表示這是低成就學生較無法理解的概念之一。教科書中在指數記法部分都在概念說明後，強調記法的熟練以及為後續指數律做準備，對於科學記號部分比較未強調「數量等級」的想法。本課程模組透過許多生活案例，像手工拉麵麵條製作的過程、實際進行紙張對摺等活動，營造學生指數記法的需求感，再進入指數記法的符號表徵，避免一開始教學時，就直接進行抽象的規則操弄、反覆計算題目；在科學記號部分的教學設計亦是如此，透過許多生活實例介紹，讓學生感受科學記號在生活中應用的必要性，體會學習科學記號的重要性與技能。本補強課程模組希望藉由上述理念的實踐，協助七年級低成就學生進行指數記法與科學記號相關概念的建立，也期待能對學生後續延伸學習有所助益。

本補強課程模組選擇新北市某國中的一個個案班級進行試行，試行時間為週五放學後的時段，有 7 位參與學習扶助課程的學生接受本團團隊的邀請參加此課程模組的實踐，所有學生均參與前、後測的實施。

一、學生表現

(一) 前測成績表現

內容 / 學生	指數記法		指數換算為數字				比較指數大小		指數計算		科學記號表示法		科學記號比較大小		正確率 %
	題 1	題 2	題 1	題 2	題 3	題 4	題 1	題 2	題 1	題 2	題 1	題 2	題 1	題 2	
學生 1	○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	○	○	○	×	86
學生 2	○	○	○	○	○	○	×	○	×	○	×	×	○	×	64
學生 3	○	×	○	○	○	○	○	×	×	×	○	×	×	○	64
學生 4	○	×	○	○	○	○	○	×	×	○	×	×	×	×	50
學生 5	○	×	×	×	×	×	○	○	×	×	×	×	×	×	21
學生 6	○	○	○	○	×	×	×	○	×	○	○	○	○	○	71
學生 7	○	×	○	○	○	○	○	×	×	○	○	×	○	×	64
正確率 %	100	43	86	86	71	71	71	43	14	71	57	29	57	29	

(二) 後測成績表現

內容 / 學生	指數記法		指數換算為數字				比較指數大小		指數計算		科學記號表示法		科學記號比較大小		正確率 %
	題 1	題 2	題 1	題 2	題 3	題 4	題 1	題 2	題 1	題 2	題 1	題 2	題 1	題 2	
學生 1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	100
學生 2	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	93
學生 3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	○	○	79
學生 4	○	○	×	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	○	79
學生 5	○	○	○	○	○	○	○	×	○	×	○	○	×	×	71
學生 6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	○	○	86
學生 7	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	○	×	○	79
正確率 %	100	100	86	100	100	100	100	86	100	71	71	57	71	86	

(三) 學生在前、後測結果比較分析

1. 「指數記法」部分，學生前測平均答對率 71%，後測時答對率 100%，有明顯的進步，顯示透過操作讓學生更能理解指數記法的意義。
2. 「指數換算為數字」，學生前測平均答對率 79%，後測時答對率 87%，只有一名學生有 1 題出現錯誤。
3. 「比較指數大小」部份，學生前測平均答對率 57%，後測時答對率 93%，前測時發現學生對於分數的乘方較不理解，答對率只有 43%，經過學習之後已加以改善提升至 86%。
4. 「指數計算」，這是含有指數的整數四則混合運算，前測的第 1 題計算 $-5^2 + 5 \times 3^2 = ?$ 答對率僅有 14%。而經過指數記法的學習，後測時第 1 題計算 $(2^3 \times 4^3) \times 4^2 = ?$

已全部答對。可能是因為沒有出現類似 -5^2 這樣的乘方，所以答對率變高，這也提醒了教師，學生對於 -5^2 這樣的乘方表示法，還需要再加強說明。

5. 「科學記號表示法」部份，前、後測平均答對率只有 43% 與 64%，表現並不是太理想，顯示學生對於要將很大或很小的數表示為科學記號，還有努力的空間。
6. 「科學記號比較大小」部分，學生前測平均答對率 43%，後測時答對率 79%，不管是很大的數或很小的數以科學記號表示後，同學對於它們大小的比較都已有進步，這表示讓學生建立科學記號為「數量等級」的觀念，已顯現初步的效果。

二、教學情形

(一) 指數記法

1. 在引入指數記法部份，本課程模組設計讓學生觀賞「拉麵麵條製作」的影片與「紙張對摺」等兩個活動。實際進行課程後，詢問學生哪一個活動會使他們對指數記法產生學習需求感或有感覺？同學的反應是「紙張對摺」> 觀賞「拉麵麵條製作」影片。探究原因，可能因為「手工拉麵麵條製作」對學生來說較陌生，而摺紙活動對學生來說，是較常面對的情境。
2. 在探究 -2^2 和 $(-2)^2$ 及 -2^3 和 $(-2)^3$ 答案相同嗎？時，還是有不少學生無法正確的理解，除了教師放慢教學速度外，也可以透過學生上台發表他的看法，進行學生之間的助學，對學生的理解亦會有幫助。
3. 在含有指數的整數四則混合運算單元，是學生最容易出現的地方，除了有上述指數記法問題，如 -2^2 、 $(-2)^2$ 、 -2^3 、 $(-2)^3$ 外，還有整數四則運算約定的問題，都是教師在教學上應該多留意的地方。
4. 在利用計算機或有計算機功能的手機，來驗算任意寫出一個大於 1，但小於 20 的數字 a ，利用計算機算出 a^6 、 a^7 、 a^8 或是寫出大於 0，小於 1 的數字 a ，利用計算機算出 a^6 、 a^7 、 a^8 之值時，在試行的教學過程發現，教導學生能夠正確操作計算機是進行這個活動的重要前提。例如，要計算 8^6 之值，利用計算可以用「8」「×」，要按 6 次，得到 262144，可是教學中總會出現學生忘記按了幾次 8，導致最後答案錯誤。



因此，教導學生學會利用計算機上的 x^y 鍵，可以讓課程進行得更順利。操作方式如下：先按 8，再按 x^y 鍵，再按 6，再按 =，就會出現答案 262144。



如果同學的計算沒有 x^y 鍵，該怎麼辦呢？利用一般的計算機也有簡便的方法可以算出乘方喔，一樣地以計算 8^6 之值為例。

- 按 8
- 連續按乘號鍵 \times 兩下，此時鎖定螢幕上的 8 為固定相乘的值，畫面中的有 \times 與 K 符號出現。
- 按下等號 =，原來的 8 乘上了 8，得到螢幕上新的結果變成 64。
- 再按下等號，原來的 64 乘上了 8，得到螢幕上新的結果變成 512。
- 注意，只能按 5 次 =，就會得到 8^6 之值為 262144。



(二) 科學記號

1. 在介紹科學記號部份，本課程設計透過多個生活實例來引入科學記號的需求，這是呼應 108 新課綱在科學記號單元，重點在於科學記號的了解與使用，例如 1 奈米等於 10^{-9} 公尺，其中含有負數次方的部分，可以使用小數與之轉換來解釋，不宜牽涉到其他底數的負次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。
2. 教學過程會發現，學生在將數字改記成科學記號 $a \times 10^n$ 時，常會出現 a 錯誤，如 $26000 = 26 \times 10^3$ ，或是 n 錯誤的情形，如 $0.0000037 = 3.7 \times 10^{-5}$ 等，這兩

類型錯誤的記法，請教師特別加以提醒此類迷思概念。

3. 將很大的數或很小的數變成科學記號來簡化此數，是我們透過生活實例產生的需求，因此比較兩個或多個科學記號的大小，就是本單元一個重要的學習內容。科學記號的意思是將數字表示成它無法再進位的最大的位值，以 81000000000 為例，此時無法再進位的最大的位值是百億，所以我們將表示成 $8.1 \times 10000000000 = 8.1 \times 10^{10}$ ，所以我們只要先看這個很大或很小的數是在哪一個「數量等級」，很快地就能比較出它們的大小。

三、教學反思與建議

（一）依據學生學習情形進行滾動調整

本教案設計理念是以生活實例為主軸，但每個學生對這些生活實例是否有感，是影響學生學習動力的主因，因此教師在選擇生活的實例可依當時學生的經驗與反應進行調整。

例如在科學記號單元筆者用了數個生活中的例子，以【辛巴威紙幣】、【NASA 的火星探測車】、【iPhone 的晶元奈米製程】等三個例子來進行比較，學生感興趣的程度分別是辛巴威紙幣 > iPhone 的晶元奈米製程 > NASA 的火星探測車，這應該是學生的生活經驗所造成的結果，鈔票、iPhone 處處可見，但火星探測車對學生來說卻相對的陌生。

其次在 10 的次方與位值單元，筆者原本設計只有觀察設計好的表格，請學生在格子內填入適當的算式或簡記符號，但是實際教學後發現學生很沒有感覺，就只是依照老師教導的步驟在反覆操作，當筆者下堂課又重新以學生感興趣的辛巴幣再度教學，讓學生抓住往上一個位值要乘 10 倍，往下一個位值是除以 10 後，再回到觀察設計好的表格，學生對 10 的次方的連結就強很多。

因此筆者建議老師們以本補強課程模組進行教學時，請視學生學習情況適時地進行生活實例、教學內容多寡、順序先後進行調整，符合該班學生的學習。

（二）重視每一個學生的學習回應

在筆者任教的七年級學習扶助班中，某次正在進行指數記法單元教學時，經過課堂進行活動與說明後，多位學生已能寫出指數記法並算出答案，我請完成的學生在小白板上寫下過程與答案，並高舉讓我知道，我會用手機幫他拍下來。其中有位學生一直在指數記法「 $5^3=?$ 」究竟是 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ 或是 $5 \times 5 \times 5$ 上產生疑惑，於是，我想先忽略他，先行關心另外兩位學生，此時，他算出答案，很激動的舉手說：「老師拍我，我要回答！」

我核對他的答案後發現「正確無誤」，於是筆者幫他拍完照後，他面露笑容，眼睛是散發光芒的。

（三）多元教學策略增進成效

在教學過程由於學生的反應不一，因此在課程設計中加入了多個生活實例，但因教學時間有限，因此在利用教具，如運用平板或是利用教學平臺，如因材網、均一教育平臺…等平臺就沒有時間再多加運用，這是未來老師們在教學時可以多加著墨之處。

四、教學建議

- （一）拉麵麵條製作影片可參考 youtube 中的影片，例如：<https://www.youtube.com/watch?v=QHmfXN2s-pA> (17 分 0 秒至 18 分 0 秒)，僅供參考，老師可以自行尋找適合的相關影片。

紙張對摺的連結影片如：https://www.youtube.com/watch?v=r3_k6mG-PU。

兩部影片的 QR Code 分別如下：



拉麵影片連結



紙張對摺影片連結

- （二）在引入指數的記法部份，筆者設計了觀賞「拉麵麵條製作」影片與「紙張對摺」兩個活動，教學者可視學生學習情形，兩個活動都進行或是擇一進行，但實際上課後，學生的有感程度是「紙張對摺」> 觀賞「拉麵麵條製作」影片；此外在「紙張對摺」活動中，紙張可準備 A4 紙張、報紙、或是全開壁報紙、甚至國畫用的宣紙…等，讓學生有多元嘗試的機會。
- （三）因為在學習扶助課程的教學上，建議乘方的指數以不超過 5 為宜，若是在比較兩個底數相同但指數不同的指數乘方時，利用計算機進行驗證會讓教學更順暢，進行活動時，教師可提醒同學攜帶計算機或是具有計算機功能的手機以利後續活動的進行。

參考文獻

李青春、胡學誠 (2009)。一個針對基礎數學學習者的線上評量與迷思概念導正工具。臺中教育大學學報：數理科技類，**23**(1)，1-28

教育部 (2000)。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。教育部。

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, 91-126. New York, NY: Academic Press.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

國中數學領域 補強課程模組 2

七年級

代數符號及一元一次式

— 雲林縣立虎尾國民中學 盧昭雯 退休教師

— 雲林縣立虎尾國民中學 江世賓 主任

設計 理念



在中小學的學習階段中，學生最排斥的學習科目通常是「數學」，再加上許多教師總是「紙上談兵」地教學數學，更不易讓學生對數學產生學習興趣。然而，從數學發展史來看，數學往往都是數學家們從生活中發現而獲得的結果。「在數學教育中，提供學生適當的具體學習經驗、半具體學習經驗、及抽象的學習經驗，有助於學生學習」（劉秋木，1977，引自王志銘與唐淑娟，2006）。因此，從數學發展史、遊戲活動、…等活動切入數學學習，可以使數學變得更有趣、生動，讓學生在活動中學習面對數學不再懼怕，並在好奇心的驅使下，樂於挑戰與學習。「情境學習理論強調知識是學習者與情境互動下的產物，是在教學活動中透過主動地探究與摸索的過程中獲得」（Brown, Collins, & Duquid, 1989）。

本補強課程模組的主題是「代數符號及一元一次式」，在代數主題的範疇中，此部分是學生從具體操作的算術計算到抽象代數學習概念的銜接，也影響後續「等量公理」、「二元一次方程式」、「二元一次聯立方程組」及「直線方程式」…等核心概念的學習。因此，開始運用未知數 x 的「一元一次式」課程，為學習代數思維之基礎關鍵課程。

本補強課程模組安排「一元一次方程式」在七年級上學期末段約一個月的時間內完成教學，以銜接下學期的「二元一次方程式」學習。而「代數符號及一元一次式」部分對教師來說，是淺顯易懂且容易學習的概念，常常將教學重心擺在後續教學概念「等量公理」部分，通常「代數符號及一元一次式」用極短時間來完成教學，爭取更多時間做「等量公理」及「應用問題」的反覆練習，力求學生能熟練解題。除此之外，大多教案多偏重在「等量公理」教學的研發，較少著墨在「代數符號及一元一

次式」這部分。然而面對七年級剛開始熟悉抽象概念的部份學生來說，沒有建立「代數符號及一元一次式」的概念對於課程適應銜接的情況、運算的能力以及學習興趣等，將影響學生接下在代數方面的運算學習。根據設計者的教學觀察發現，學生在「化簡一元一次式」單元的學習狀況，常有以下幾種錯誤類型：第一種：不理解「 x 」是由「 $1 \times x$ 」簡寫而來，計算「 $3x+x$ 」時，寫成「 $3x+x=3x$ 」；第二種：不理解文字符號做加減法運算時，是運用分配律運算規則來計算，因此計算「 $5x-2x$ 」時，寫成「 $5x-2x=3$ 」，直接將「 x 」相減消掉；第三種：不熟悉分配率 $a(b+c)=ab+ac$ 概念，誤植為 $a(b+c)=ab+c$ ，化簡「 $3(x+2)$ 」時，寫成「 $3(x+2)=3x+2$ 」，忽略 3 也要 $\times 2$ ；第四種：沒有建立同類項概念，因此計算「 $5x-2x+3$ 」，寫成「 $5x-2x+3=6x$ 」或合併第二種類型，寫成「 $5x-2x+3=6$ 」。分析學生錯誤類型發生的原因，在於「代數符號」這部分的教學太匆促，學生概念學習不完整，基礎薄弱，因此影響後續的學習。

本補強課程模組教學設計首先強化「代數符號」的基礎學習，讓學生熟習「代數符號」運用後，再引入「一元一次式」的概念及化簡。因此，本課程模組利用「圍棋棋子活動」複習交換律及分配律，並從國小所學的具體計算到引入國中未知數「 x 」概念；利用「通關密語活動」讓學生理解為何乘號「 \times 」要省略或改寫成「 \cdot 」的學習，並以「數學史」讓學生學習有具體感；希望利用「網路熱門話題」讓學生感受生活中的數學，能對數學不排斥；同時以「數線」分析文字敘述，讓學生對閱讀理解學習狀況能更熟悉。期望學生能順利跨越具體到抽象的橫溝，提高學習興趣；最後「模仿老師解題」一步一步帶領學生練習「一元一次式的化簡」，並引入「一元一次式方程式」以延續後續的學習。期望能讓學生學習更有感並能達到有效的數學學習。

課程架構

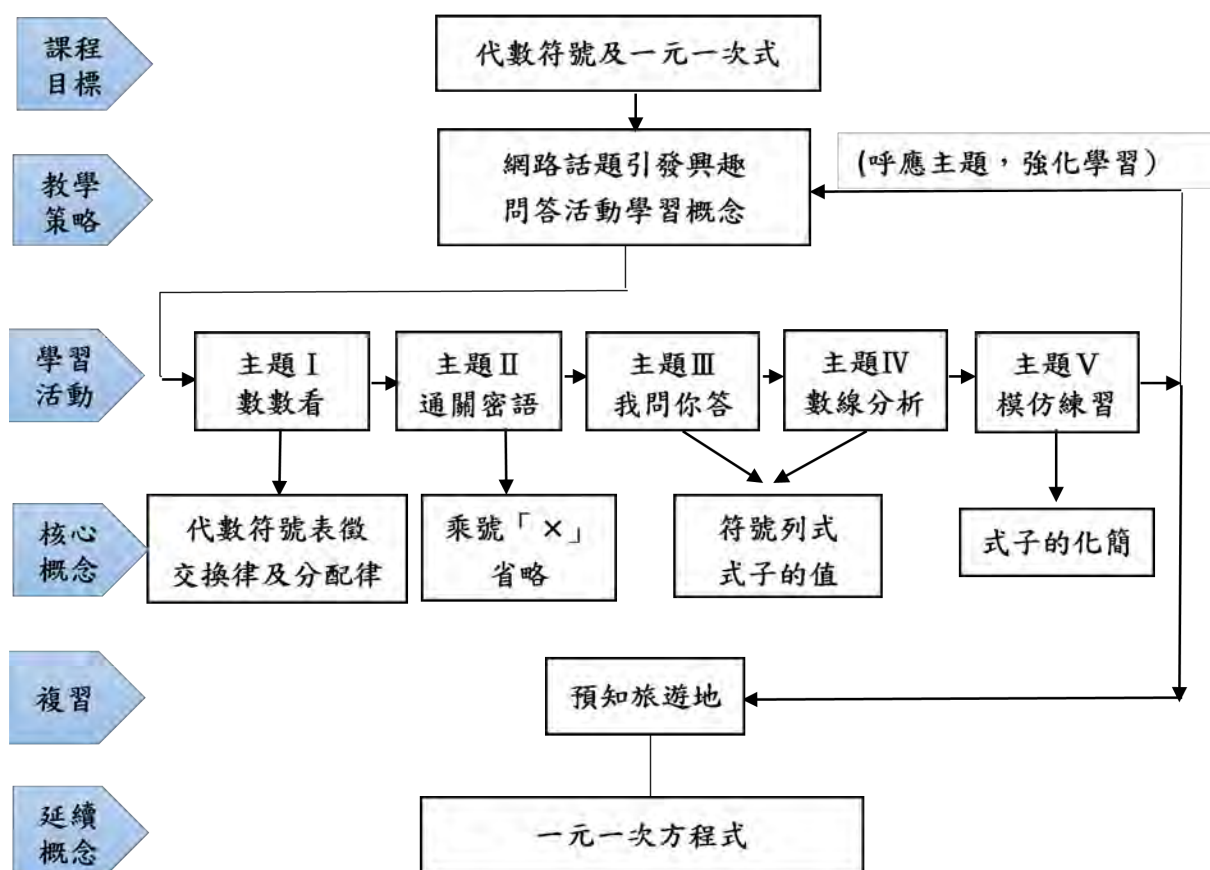


圖 1：課程架構圖

- (一) 主題 I (第一節課): 利用網路話題「計算 $6 \div 2(1+2)$ 的值」, 讓學生先行計算時, 透過學生各式各樣的計算結果, 引發學生的討論。此時, 教師可透過學生的算式瞭解學生在四則運算的迷思與錯誤, 於教學過程中適時進行補強。接續, 再利用「數數看」的觀察活動, 複習國小階段學過的交換律及分配律, 逐步引入以代數符號表徵交換律及分配律的學習。
- (二) 主題 II (第二節課): 「通關密語」活動, 是利用學生書寫乘號「 \times 」與文字符號「 x 」經常出現的草率行為, 讓學生感受因草率導致的混淆現象, 進而說明乘號「 \times 」省略的概念, 再利用「數學史」的介紹加深概念學習。當學生熟悉乘號「 \times 」省略的概念後, 則接續加強如 $2x=2 \times x$ 等概念反推的練習, 除了強化乘號「 \times 」省略的概念外, 同時也為後續「式子的化簡」做好學習準備。

- (三) 主題 III (第三節課)：當低成就學生遇到應用問題時，由於過去並未養成閱讀的習慣，因此，總常以一句「看不懂」，就放棄閱讀題目與解題。本節課透過「我問你答」活動的過程及表格分析，引導學生理解應用問題的重點，並帶出「符號列式」及「式子的值」概念學習。
- (四) 主題 IV (第四節課)：低成就學生除了沒有閱讀習慣外，也不善於思考，透過「數線分析」活動，期能協助學生進一步利用數線分析應用問題中，兩者之間的關係比較，以正確列出符合題意的代數關係式。同時複習上一節課所學的「式子的值」。也為「等量公理應用問題」概念做好學習準備。
- (五) 主題 V (第五、六節課)：學生在「式子的化簡」的解題上，經常因為一個環節概念不清楚，而導致計算錯誤。透過「模仿練習」的引導，學生可以模仿教師解題，一步一步地帶領學生利用第二節課乘號「 \times 」省略反推練習概念以及第一節課交換律及分配律，以熟悉「式子的化簡」步驟。並讓學生利用所學過的討論網路「計算 $6 \div 2(1+2)$ 的值」算式討論，藉此對網路世界的真真假假要有判斷思考力。最後，若時間許可，再利用「預知旅遊地」複習「代數符號及一元一次式」的概念，並介紹「一元一次方程式」及「一元一次方程式解的意義」。

教材分析



(一) 本補強課程模組之重要性

代數概念與運算技能是由算術概念以及四則運算技能抽象化而來。如何將「文字符號」擺在「數」的位置進行計算，是學習代數的門檻。一元一次式概念形成後，在數學學習上，將能順利銜接代數學教材的中心內容「解方程式」，一方面能學習更多文字符號的方程組：如二元一次聯立方程式；另一方面也能學習更高次文字符號的方程組：如一元二次方程式。甚至能運用於管理預算、支付賬單…等生活中的應用問題與情境。本模補強課程組教材課程的內涵與其他教材學習內容間的關係如圖 2 所示：

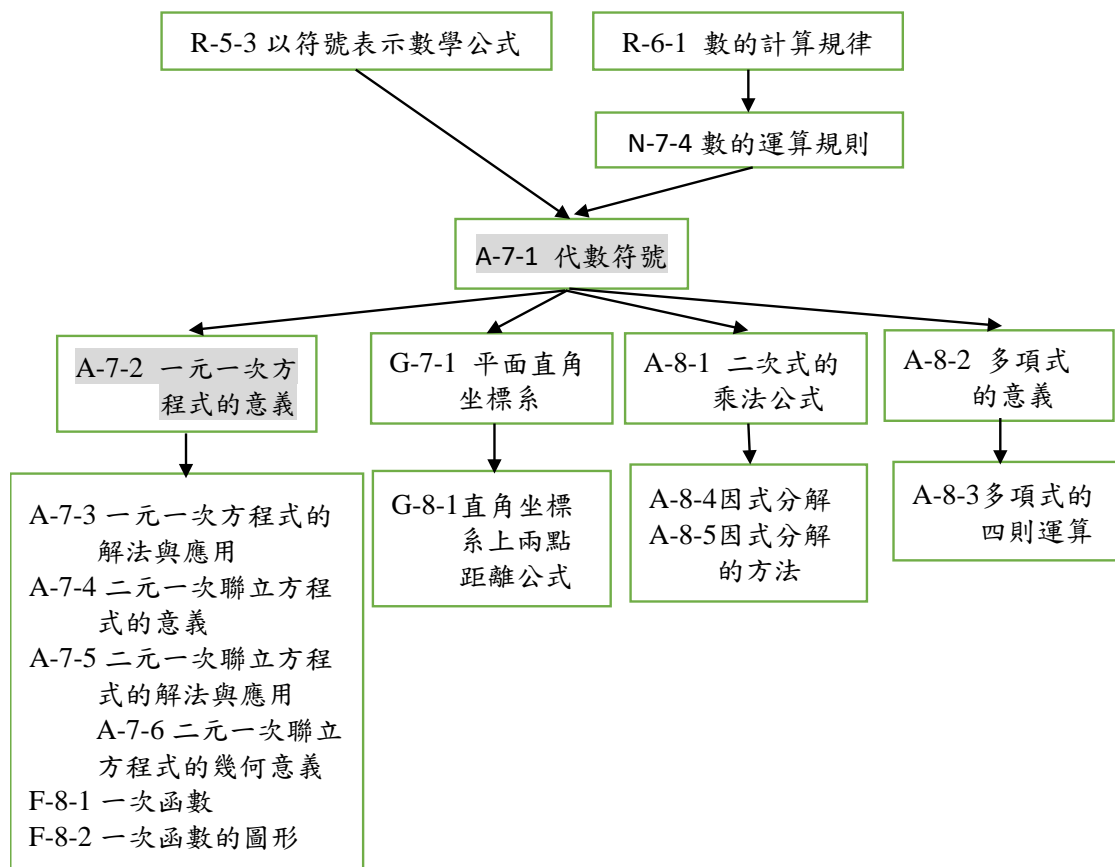


圖 2：補強課程模組學習內容與其他年段學習內容間的關係圖

(二) 本補強課程模組之內容分析

本補強課程模組教材的學習內容，主要為「以代數符號表徵交換律、分配律、結合律」；「一次式的化簡及同類項」；「以符號紀錄生活中的情境問題」，希望學生在生活情境中或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。本模組教材基本學習內容，如圖 3。

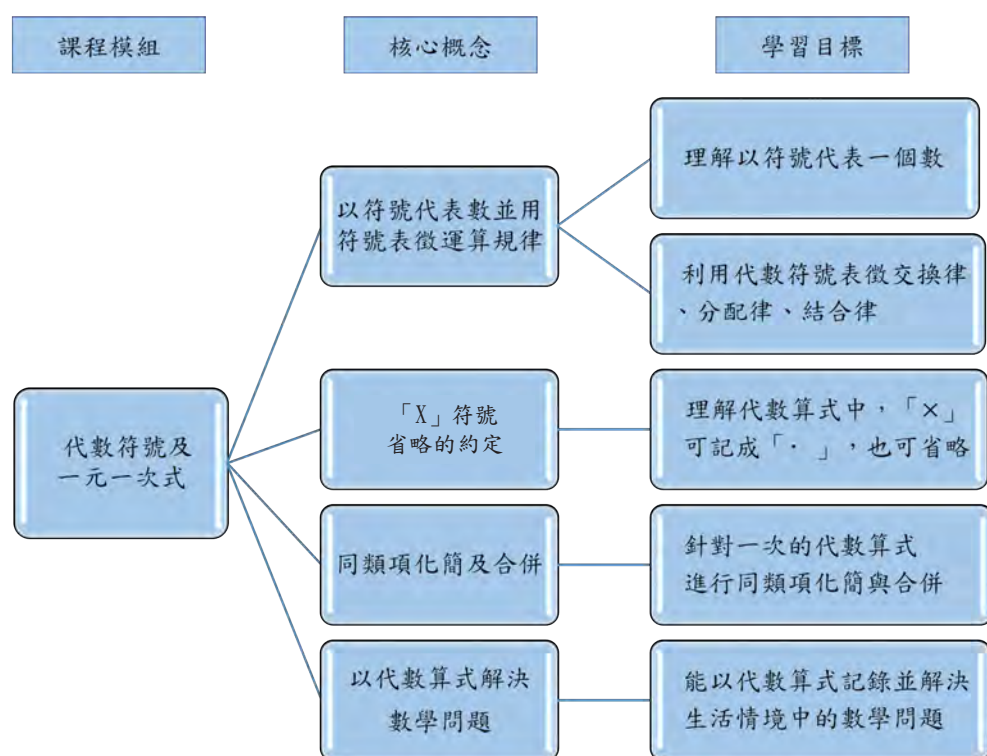


圖 3：本補強課程模組的核心概念與學習目標架構

(三) 教材分析與課程架構的關係

本補強課程模組教材是以「代數符號及一元一次式」為主軸，首先以網路流傳有關算式運算的話題，引入「一元一次方程式的意義」之簡易概念介紹。「代數符號及一元一次式」是學習代數思維與運算的基礎關鍵，因此，教學過程中，建議教師以緩慢引導的教學步調，帶領學生確實的學習與運算。所以，整套課程模組學習的架構可分

為三個面向，一、透過操作活動與非形式的溝通、討論，引導學生理解如何以文字符號進行表徵；二、採用數線分析，引導學生逐步使用數學的抽象思維，來解決問題；三、採用步驟模仿的方式，引導學生熟悉代數式的運算法則。希望學生體會使用數學符號進行運算的便利性，進一步願意使用數學的抽象思維來學習。本課程模組的教材內容與課程架構的關聯如表 1 所示：

表 1：本補強課程模組教材分析與課程架構之關係性說明

課程模組核心概念	學習活動	教學策略	教學內涵
主題 I 以符號表徵運算規律 (第 1 節課)	數數看	動手做	操作圍棋棋子的排列，從已知圍棋棋子個數複習國小學過的交換律及分配律，再逐步以棋子個數未知，引入以代數符號來表徵交換律及分配律。
主題 II 符號約定 (第 2 節課)	通關密語	認知衝突 數學史融入	口頭傳達通關密語，利用學生書寫乘號「 \times 」與文字符號「 x 」的草率性，來說明乘號「 \times 」省略的概念，再利用「數學史」加深學習概念。
主題 III 數學問題 (第 3 節課)	我問你答	提問 鷹架引導	利用提問及學習單表格填空的方式，讓學生理解生活情境中簡易數學問題的重點，並引入「符號列式」及「式子的值」概念學習。
主題 IV 數學問題 (第 4 節課)	數線分析	圖像表徵	透過繪製「數線圖的方式」，協助學生進一步理解生活情境中，兩個量之間的關係與比較的數學問題，並學習以代數算式紀錄數學的關係式。
主題 V 同類項化簡及合併 (第 5、6 節課)	字卡分類 模仿練習	模仿練習 動手做	<ol style="list-style-type: none"> 1. 利用字卡分類，釐清「同類項」的概念。 2. 透過「模仿練習」，引導學生模仿教師的解題步驟，一步一步帶領學生利用第二節課所學的乘號「\times」省略反覆練習並利用第一節課所學的交換律及分配律，熟悉「式子的化簡」步驟。 3. 利用「我是預言家」活動，引入對一元一次方程式意義的理解。

教學計畫



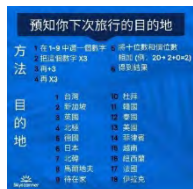
模組名稱	代數符號及一元一次式
授課節數規劃	六節課
學習重點 (內容、概念、能力)	<p>學習內容</p> <p>A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題 (a-IV-1)。</p> <p>A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式 (a-IV-2)。</p> <p>學習表現</p> <p>a-IV-1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算推證明。</p> <p>a-IV-2 理解一元一次方程式及其解的意義，能以等量公理與移項法則求解和驗算，並能運用到日常生活的情境解決問題。</p> <p>基本學習內容</p> <p>AC-7-1-1 一元一次式及二元一次式。</p> <p>AC-7-2-1 列一元一次方程式。</p> <p>AC-7-2-2 一元一次方程式解的意義。</p>
適用對象	<p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容</p> <p>R-6-1 數的計算規律</p> <p>學生應認識</p> <p>(1) 整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。</p> <p>(2) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。</p> <p>(3) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。</p> <p>R-5-3 以符號表示數學公式</p> <p>國中代數的前置經驗：初步體驗符號之使用，隱含「符號代表數」、及「符號與運算符號的結合」的經驗。應併入其他教學活動。</p> <p>N-7-4 數的運算規律</p> <p>交換律；結合律；分配律；$-(a+b)=-a-b$；$-(a-b)=-a+b$。</p>

教學連結建議	<ol style="list-style-type: none"> 銜接概念：聯立方程式、線型函數、一元二次方程式、直角坐標系 <ul style="list-style-type: none"> A-7-3 一元一次方程式的解法與應用 A-7-4 二元一次聯立方程式的意義 A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用 A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義 G-7-1 平面直角坐標系 A-8-1 二次式的乘法公式 A-8-2 多項式的意義 F-8-1 一次函數 F-8-2 一次函數的圖形 跨學科應用：(略)
學習目標	<ol style="list-style-type: none"> 能以代數符號表徵交換律、分配律、結合律。 能熟悉乘號「\times」省略的概念。 能以符號記錄文字敘述的問題。 能以數字代入式子，並計算其正確的值。 能處理一次式的化簡。 能針對網路訊息具備判斷的能力。
教學策略	<div data-bbox="501 1182 1358 1379"> </div> <ol style="list-style-type: none"> 透過網路流傳有關算式運算的話題，讓學生感受生活中的數學知識，提升學生對數學的興趣。 透過實物操作及討論、探究，引導學生從數字表徵，學習以文字符號表徵。 以循序漸進的活動引學生學習數學概念，讓學生培養用數學的意識。 教學活動中，配合「提問」的方式進行課程之教學，引導學生進行思考。 以「模仿教學法」引導學生進行運算。
教學材料	<ol style="list-style-type: none"> 同色圍棋棋子 學習單 (附件 1~5)。 字卡 (附件 17)

教學資源

1. 各版本教科書
2. 預知你下次旅行的目的地。

圖片來源：<https://forum.hkgolden.com/thread/7222982/page/1>



3. 數學百子新櫃 (十四) P94~95。

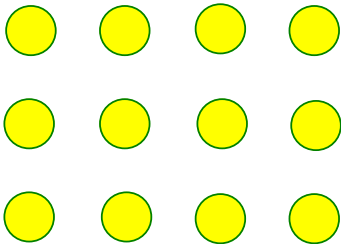
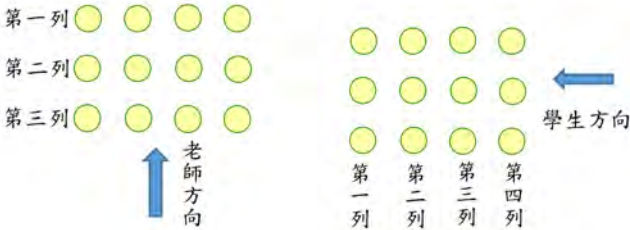
取自：<https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/res/Cabinet%2014.pdf>

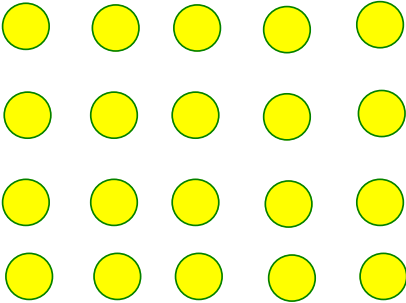
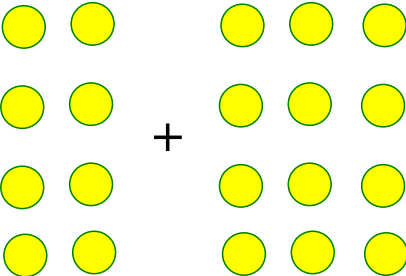


主題 I：以代數符號表徵交換律及分配律

教學活動流程設計	教學注意事項			
<p>一、準備活動</p> <p>1. 提出問題</p> <p>提出網路話題「計算 $6 \div 2(1+2)$ 的值 = ?」，引發學生討論，並請學生計算</p> <p>2. 請同學說說看其計算的過程及答案</p> <p>3. 提供學生所有不一樣的計算過程以供討論比較 (若學生計算過程都一樣，則提出以下網路的爭議供討論，但暫不給予任何說明)</p> <table><tr><td>$\begin{aligned} &6 \div 2(1+2) \\ &= \frac{6}{2(1+2)} \\ &= \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$</td><td>$\begin{aligned} &6 \div 2(1+2) \\ &= 3(1+2) \\ &= 3 \times 3 = 9 \end{aligned}$</td><td>$\begin{aligned} &6 \div 2(1+2) \\ &= 6 \div 2 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 6 \div 2 + 4 \\ &= 3 + 4 = 7 \end{aligned}$</td></tr></table> <p>二、發展活動一</p> <p>從複習國小 R-1-2 加法交換律概念，延伸到以代數符號表徵加法交換律。</p>	$\begin{aligned} &6 \div 2(1+2) \\ &= \frac{6}{2(1+2)} \\ &= \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &6 \div 2(1+2) \\ &= 3(1+2) \\ &= 3 \times 3 = 9 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &6 \div 2(1+2) \\ &= 6 \div 2 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 6 \div 2 + 4 \\ &= 3 + 4 = 7 \end{aligned}$	<p>1. 學生的任何答案都予以肯定</p> <p>2. 引導學生說出看法</p> <p>3. 不討論對錯</p>
$\begin{aligned} &6 \div 2(1+2) \\ &= \frac{6}{2(1+2)} \\ &= \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &6 \div 2(1+2) \\ &= 3(1+2) \\ &= 3 \times 3 = 9 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &6 \div 2(1+2) \\ &= 6 \div 2 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 6 \div 2 + 4 \\ &= 3 + 4 = 7 \end{aligned}$		

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>主題 I. 數數看</p> <p>(1) 準備黑色 (或白色) 圍棋棋子</p> <p>(2) 將圍棋棋子數枚分別放入甲、乙兩袋袋內 (兩袋個數不用相同)</p> <p>(3) 教師從甲袋內拿出 2 枚棋子，再從乙袋內拿出 3 枚棋子。 教師說明：依老師所拿出棋子的先後順序，可將棋子總枚數列式為 $2+3$</p> <p>(4) 請一位學生先從甲袋內拿出 3 枚棋子，再從乙袋內拿出 2 枚棋子。 教師提問：依你們所拿出的先後順序可將棋子總枚數列式為何？</p> <p>(5) 兩次所拿棋子數，放在桌子上，請學生數數看兩堆棋子個數相同嗎？ (引導學生利用所列式子及總個數相同說出 $2+3=3+2$)</p> <p>2. 教師提問</p> <p>教師提問 1：老師先從甲袋中先拿出 5 枚棋子，再從乙袋中拿出 3 枚棋子，放在桌子上，跟先從甲袋中拿出 3 枚棋子，再從乙袋中拿出 5 枚棋子，放在桌子上，兩次拿出的棋子總枚數會相同嗎？怎麼列式？</p> <p>教師提問 2：老師先從甲袋中拿出 12 枚棋子，再從乙袋中拿出 3 枚棋子，放在桌子上，跟從甲袋中拿出 3 枚棋子，再從乙袋中拿出 12 枚棋子，放在桌子上，兩堆棋子個數相同嗎？怎麼列式？</p> <p>教師提問 3：現在老師先從甲袋中拿出 x 枚，再從乙袋中拿出 3 枚棋子，所以老師從甲袋跟乙袋內依先後順序，拿出來棋子的總枚數可列式為何？</p>	<p>棋子的顏色需相同，以避免學生因排列棋子的顏色不同而誤導其思考方向。也可用其他相同的物品替代。</p> <p>引導學生以先後順序 列出 $3+2$</p> <p>學生會直接回答都是 5 枚棋子，引導學生連同列式一起思考。</p> <p>提問 1：引導學生回答 $5+3=3+5$ 提問 2：引導學生回答 $12+3=3+12$ 提問 1，2 直接提問 學生若無法確切回答 則重複數數看活動。 學生能確切回答，則進行提問 3</p> <p>提問 3 引導學生以先後順序列出 $x+3$</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>教師提問 4：老師先從甲袋中拿出 3 枚棋子，再從乙袋中拿出 x 枚棋子，這時老師從甲袋跟乙袋內依先後順序，拿出來棋子的總枚數可列式為何？</p> <p>(讓學生以國小學過的「以文字或符號列關係式」概念列式，此時尚不強調國中列式概念)</p> <p>教師提問 5：$x+3$ 是否與 $3+x$ 相等嗎？為什麼？</p> <p>3. 教師總結</p> <p>說明代數符號 $a+b=b+a$ 表徵加法交換律</p> <p>三、發展活動二</p> <p>從複習國小 R-2-3 乘法交換律概念，延伸到以代數符號表徵乘法交換律。</p> <p>1. 學習單一 (附件 1) 範例說明</p> <p>(1) 教師取出 12 枚棋子，排列成 4×3 長方形 (如下圖)，並說明橫列與直行的意義。</p>  <p>(2) 教師站在前面說：橫列每列 4 枚共 3 列，所以共有 $4+4+4=4 \times 3$ 枚棋子</p>  <p>(3) 學生從右邊 (或左邊) 方向看說：橫列每列 3 枚共 4 列，所以共有 $3+3+3+3=3 \times 4$ 枚棋子</p> <p>(4) 引導學生觀察，並說出其觀察結果</p>	<p>提問 4 引導學生以先後順序列出 $3+x$</p> <p>引導學生根據前置經驗知道，總枚數一樣。</p> <p>學生可能只說出總數一樣，引導學生根據算式進一步說明 $4 \times 3 = 3 \times 4$</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>2. 學生討論</p> <p>完成學習單一 (附件 1)</p> <p>(第 3 題加入代數符號表徵，學生無法順利回答時，重複第 1、2 題形式的類題，反覆練習，提供學生多一點的思考)</p> <p>3. 教師總結：藉由學習單一說明</p> <p>說明代數符號 $a \times b = b \times a$ 表徵乘法交換律</p> <p>四、發展活動三</p> <p>複習國小 R-5-2 分配律概念並延伸到以代數符號表徵分配律</p> <p>1. 切割活動 1</p> <p>(1) 範例一說明</p> <p>I. 教師取出 20 枚棋子，排列成如下圖橫列每列 5 枚共 4 列的長方形，棋子總數可列式為 4×5。</p> <div></div> <p>II. 若將本來每橫列 5 枚棋子的長方形，切割成每橫列 2 枚棋子的長方形與每橫列 3 枚棋子的長方形如下圖，因為 $5 = 2 + 3$，所以 $4 \times 5 = 4 \times (2 + 3)$</p> <div></div>	<p>協助學生完成學習單</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>III. 教師提問 1：右邊切割後兩個長方形的個數分別如何表示？</p> <p>教師提問 2：兩個長方形的個數與原長方形有何關係？</p> <p>(引導學生說出 $4 \times 5 = 4 \times 2 + 4 \times 3 \cdots$ 等關係)</p> <p>(2) 學生完成學習單二 (附件 2) 範例一第 1 題並分享其切割法及其推論。</p> <p>(3) 學生完成學習單二 (附件 2) 範例一第 2 題並互相分享其推論。</p> <p>2. 切割活動 2</p> <p>(1) 範例二說明</p> <p>I. 將每列將每列 $x+1$ 枚共 4 列的棋子，引導學生切割成每列 x 枚棋子與每列 1 枚棋子且皆為 4 列的長方形，如下圖</p> <p>II. 教師提問 1：右邊切割後兩個長方形的個數分別如何表示？</p> <p>教師提問 2：兩個長方形的個數與原長方形有何關係？</p> <p>(引導學生說出 $4 \times (x+1) = 4 \times x + 4 \times 1$ 等關係)</p> <p>(2) 學生完成學習單二 (附件 2) 範例二類題並分享其推論。</p> <p>3. 教師總結</p> <p>說明代數符號 $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ 表徵分配律</p> <p>五、回顧與總結</p> <p>代數符號表徵交換律、分配律、結合律。</p>	<p>利用提問來說明學習單二的範例一</p> <p>協助學生完成學習單第 1 題，範例為直切，可提示學生也可橫切</p> <p>完成範例二類題前，可先口頭引導學生理解每列 $x+2$ 枚，則切割為 x 枚與 2 枚；每列 $x+7$ 枚，則切割為 x 枚與 7 枚 \cdots 等，也可作為「乘法公式」單元的準備。</p>

主題 II：理解代數算式中，「 \times 」可記成「 \cdot 」，也可省略

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>一、準備活動：通關密語 -- 依樣畫葫蘆</p> <ol style="list-style-type: none"> 指派一位學生上台，將教師的口令寫在黑板上 教師在被指派學生的耳邊說出「2 乘以 x」，請該位學生將其聽到的內容寫在黑板上。 請其他同學唸出黑板上同學所寫的口令。 若全數同學都能正確唸出教師的口令，即可過關 教師提問 1：為什麼通關密語書寫在黑板上時，你們會唸出不一樣的密語？(若學生全部唸正確，可暗示是否會看成 2 叉叉或 $2xx$) 教師提問 2：「\times」與「x」兩者容易混淆，該如何處理？ <p>二、教師概念說明</p> <ol style="list-style-type: none"> 乘號「\times」省略說明 <ol style="list-style-type: none"> 說明「\times」與「x」書寫上容易混淆，所以列式時，常將乘號「\times」省略不寫或改寫成「\cdot」。 請同學以「\cdot」代替乘號「\times」，將 $2 \times x$ 改寫成 $2 \cdot x$ 寫在紙上，同學間互相觀摩後說說感想。 (學生常將 $2 \cdot x$ 寫成 $2.x$，變成 2 點 x) 符號簡記簡史 以數學發展簡史強化符號簡記的概念 <p>2. 乘號「\times」省略約定說明</p> <ol style="list-style-type: none"> 乘號「\times」省略時，數字寫在文字的左邊。 $1 \times x$ 乘號「\times」省略時，因為 1 和任意數的乘積等於該數自己本身，因此 $1 \times x = x \times 1 = 1x = x$；$(-1) \times x = x \times (-1) = -1x = -x$ <p>三、符號簡記強化練習</p> <ol style="list-style-type: none"> 符號簡記練習一：教師帶領學生一起完成課堂練習一(附件 6) <p>---「將乘號「\times」省略不寫或改寫成「\cdot」的題目」練習</p> <p>例如：$2 \times x = 2 \cdot x = 2x$</p>	<p>指派平常字跡很亂的學生 學生可能唸成 2 叉叉或 $2xx$ 也可能為了好玩，亂唸一通。</p> <p>引導學生說出「\times」與「x」在書寫上容易混淆。 接受學生的各種說法，並稱讚其創意思考</p> <p>利用「\times」與「x」書寫上容易混淆及「\cdot」易寫成小數點，讓學生更能理解乘號「\times」的省略</p> <p>符號簡記簡史參考自數學百子新櫃(十四)p.94~95</p> <p>教師帶領學生完成的過程中，隨時注意學生學習的狀況。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>2. 小試身手</p> <p>小試身手一 (附件 11)</p> <p>--- 仿課堂練習一：熟練「將乘號「\times」省略不寫或改寫成「\cdot」的題目」</p> <p>3. 符號簡記練習二：教師帶領學生一起完成課堂練習二 (附件 7)</p> <p>--- 「算式中乘號「\times」省略」與「乘號「\times」沒有省略或改寫成「\cdot」的等號關係。</p> <p>例如：$2x=2\times x=x\times 2=2\cdot x=x\cdot 2$</p> <p>4. 小試身手</p> <p>小試身手二 (附件 12)</p> <p>--- 連連看：熟悉「算式中乘號「\times」省略」與「乘號「\times」沒有省略或改寫成「\cdot」的等號關係</p> <p>四、回顧與總結</p>	<p>觀察學生練習狀況，隨時指導。</p> <p>此部分是為「式子的化簡」及「等量公理」的學習做準備</p>

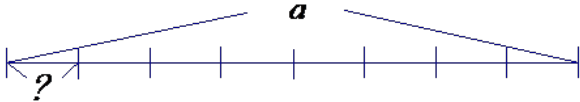
主題 III：「符號列式」及「式子的值」概念學習

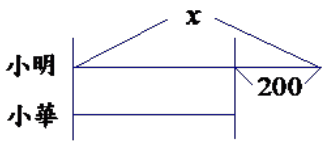
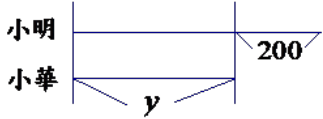
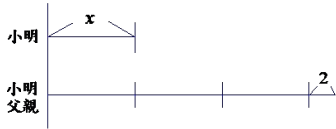
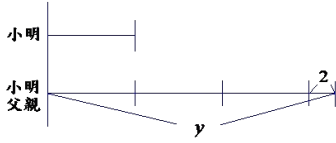
教學活動流程設計	教學注意事項
<p>一、準備活動：我問你答學概念</p> <p>教師提問 1：各位同學，你們今年幾歲？5 年前的你們是幾歲？怎麼計算？</p> <p>教師提問 2：這盒粉筆現在盒內有 10 枝粉筆，老師拿走 1 枝使用，現在盒子內剩幾枝粉筆？</p> <p>(依學生回答狀況，增減以上類型題目)</p> <p>教師提問 3：老師手上這袋糖果，分給學生每人 1 顆後，袋子內會剩下幾顆糖果？</p> <p>(引導學生說出：不知道袋內原有多少顆糖果，所以不能知道或沒辦法算…)</p>	<p>先以有標準計算答案的題目開始，務求學生計算列式正確。</p> <p>題目設計以學生周遭熟悉物品開始。</p> <p>糖果可使用其他物品替代。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項																																								
<div>二、提問引入概念教學：以符號列式及式子的值</div> <div>1.教師提問</div> <div>(1) 若袋內有 50 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，則袋子內會剩下幾顆糖果？如何列式計算？</div> <div>(2) 若袋內有 25 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，則袋子內會剩下幾顆糖果？如何列式計算？</div> <div>(3) 若袋內有 13 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，則袋子內會剩下幾顆糖果？如何列式計算？</div> <div>(依學生回答狀況，增減以上類型題目)</div> <div>(4) 若袋內有 x 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，怎則袋子內會剩下幾顆糖果？如何列式計算？</div> <div>(學生無法順口回答出 $(x-10)$ 顆時，可引導學生觀察上述 (1)~(3) 問題的列式)</div> <div>2. 概念學習</div> <div>(1) 表格分析</div> <table><tr><td>題目</td><td colspan="4"></td></tr><tr><td>列式</td><td colspan="4"></td></tr><tr><td>x 值</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>計算結果</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> <div>與學生共同完成，將上面表格的空格一一填入</div> <div>I 請將上述題目填入題目一欄中</div> <div>II 依題目意思，在列式列中填入算式應對應</div> <div>III 填入 x 值</div> <div>IV 填入計算結果</div> <div>(2) 概念說明</div> <div>I 文字敘述：生活中的情境問題</div> <div>=> 袋內有 x 顆糖果，你們有 10 人，分給你們每人 1 顆後，袋子內剩下幾顆果？</div>	題目					列式					x 值					計算結果					<div>表格填空參考答案</div> <table><tr><td>題目</td><td colspan="4">袋內有 x 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，袋子內剩下幾顆糖果？</td></tr><tr><td>列式</td><td colspan="4">$x-10$</td></tr><tr><td>x 值</td><td>50</td><td>25</td><td>13</td><td></td></tr><tr><td>計算結果</td><td>40</td><td>15</td><td>3</td><td>視 x 值填入適當數值</td></tr></table> <div>讓學生自己填入任意合理的數字。</div> <div>以表格填空例子做概念說明</div>	題目	袋內有 x 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，袋子內剩下幾顆糖果？				列式	$x-10$				x 值	50	25	13		計算結果	40	15	3	視 x 值填入適當數值
題目																																									
列式																																									
x 值																																									
計算結果																																									
題目	袋內有 x 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，袋子內剩下幾顆糖果？																																								
列式	$x-10$																																								
x 值	50	25	13																																						
計算結果	40	15	3	視 x 值填入適當數值																																					

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>II 式子的值：將符號列式中的 x，以數字代入所得的計算結果。</p> <p>$\Rightarrow x-10$，$x=50$ 時，則 $x-10=40$</p> <p>40 稱為式子 $x-10$ 的值</p> <p>三、強化練習</p> <p>1. 表格分析練習</p> <p>帶領學生完成課堂練習三 (附件 8) 練習第 1 題與第 2 題</p> <p>2. 小試身手</p> <p>完成小試身手三 (附件 13)</p> <p>--- 表格分析填空練習</p>	<p>課堂練習三 (附件 8) 練習時可由學生自己決定 x 的值。</p> <p>小試身手三 (附件 13) 可由老師指定或由學生自己決定 x 的值</p>

主題 IV：以符號紀錄生活中的情境問題

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>一、準備活動：複習 --- 附件 9</p> <p>複習上節課「以文字符號列式」簡易數學問題的概念</p> <p>學生完成課堂練習四 (附件 9) 的題目 (學生無法完成的題目，此時先不說明)</p> <p>二、畫畫看</p> <p>帶領學生利用數線畫法分析文字敘述的意義，並說明課堂練習四 (附件 9) 中 1~3 題的列式：</p> <p>1. 水果一箱 a 元，8 人合買一箱水果，則每人要分攤多少元？</p> 	<p>附件 9 的 1 題與的 2 題為檢驗學生主題 III 學習狀況，第 3 題及第 4 題中的第 (2) 小題，學生較容易犯錯或不會寫，為主題 IV 學習做準備。</p> <p>教師引導學生以數線分析如何以符號記錄問題。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>2. 已知小明的存款比小華多 200 元，則</p> <p>(1) 如果小明有 x 元，則小華有多少元？</p>  <p>(2) 如果小華有 y 元，則小華有多少元？</p>  <p>3. 小明父親今年的年齡是小明年齡的 3 倍多 2 歲，則：</p> <p>(1) 如果小明今年的年紀是 x 歲，則小明父親的年紀是多少歲？</p>  <p>(2) 如果小明父親今年的年齡是 y 歲，則小明的年齡是多少歲？</p>  <p>三、驗收</p> <p>學生利用數線分析課堂練習四 (附件 9) 第 4 題並完成列式</p> <p>四、強化練習</p> <p>1. 表格分析練習</p> <p>帶領學生完成課堂練習五 (附件 10)。</p> <p>2. 小試身手</p> <p>完成小試身手四 (附件 14)</p> <p>--- 數線分析 --- 以符號列式。</p>	<p>學生在求小明年齡的列式中，常先除 3 再減 2，以數線圖進行分析可讓學生更容易理解概念。</p>

主題 V：一次式的化簡及同類項

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>第五節課</p> <p>一、準備活動：同類項概念學習 -- 分類</p> <p>1. 分類活動 一</p> <p>(1) 請學生將甲袋內物品依自己的想法分類</p> <p>甲袋內物品可放置學生熟悉的物品，例如：</p> <p>① 各種顏色原子筆各數枝</p> <p>② 紅豆、綠豆、大豆…等各數顆</p> <p>(2) 說說看以甚麼準則做歸類？</p> <p>2. 歸類活動二</p> <p>(1) 請將乙袋內的字卡 (附件 17) 歸類</p> <p>(乙袋內字卡分別寫上，如 x、$-2x$、$5x$、$\frac{2}{3}x$、\dots， $3y$、$-\frac{2}{3}y$、$-2y$、\dots 1、-7、3、$\frac{3}{5}$、0、\dots</p> <p>(2) 說說看以甚麼準則做歸類能完全分類？若</p> <p>I. 學生回答：以數字相同分類</p> <p>學生觀察，若以數字相同分類，能否將字卡全數歸為此兩類？</p> <p>II. 學生回答：以「+」、「-」分類</p> <p>讓學生觀察，若以「+」、「-」分類，「0」要歸類到哪類？</p> <p>III. 學生回答：以「x」、「y」、「數字」分類</p> <p>讓學生觀察，若以「x」、「y」、「數字」分類，能否將字卡全數歸為此三類？</p> <p>3. 教師說明</p> <p>「一元一次式」、「項」、「同類項」、「係數」等名詞介紹</p> <p>二、一元一次式化簡概念說明</p> <p>※ 算式的乘除化簡：利用符號表徵交換律</p> <p>1. 複習交換律</p>	<p>袋內物品有的數量一樣有的不一樣，以引導學生能有不同歸類法。</p> <p>鼓勵學生說出自己的歸類準則。</p> <p>字卡可參考附件 17</p> <p>乙袋內字卡一定要有數字「0」，學生常有的迷思概念之一：以正、負數來分類。</p> <p>且一定要有數字相同但文字符號不同的字卡，學生常有的迷思概念之二：數字相同即為同類項。</p> <p>以數字相同分類或以「+」、「-」分類，務必讓學生察覺，無法將所有字卡全部分類。</p> <p>引導學生說出以「x」、「y」、「數字」分類</p>

教學活動流程設計	教學注意事項																																							
<div>2. 模仿練習</div> <div>教師一步一步帶領學生完成學習單三 -- 式子的乘除化簡 (附件 3) 第 1 題與第 2 題計算，老師每寫完一個步驟後，讓學生模仿練習完成相關步驟。</div> <div>例 1</div> <table><tr><th></th><th>老師教學</th><th>學生模仿練習</th></tr><tr><td>題目</td><td>$3x \times 2$</td><td>$5x \times 2$</td></tr><tr><td>第一步驟 寫出算式中的乘號「\times」</td><td>$= 3 \times x \times 2$</td><td></td></tr><tr><td>第二步驟 使用交換律</td><td>$= 3 \times 2 \times x$</td><td></td></tr><tr><td>第三步驟 數字乘法計算</td><td>$= 6 \times x$</td><td></td></tr><tr><td>第四步驟 乘號「\times」省略</td><td>$= 6x$</td><td></td></tr></table> <div>例 2</div> <table><tr><th></th><th>老師教學</th><th>學生模仿練習</th></tr><tr><td>題目</td><td>$-3x \div \frac{3}{5}$</td><td>$2x \div \frac{4}{3}$</td></tr><tr><td>第一步驟 「\div」改「\times」</td><td>$= -3x \times \frac{5}{3}$</td><td></td></tr><tr><td>第二步驟 寫出算式中的乘號「\times」</td><td>$= -3 \times x \times \frac{5}{3}$</td><td></td></tr><tr><td>第三步驟 使用交換律</td><td>$= -3 \times \frac{5}{3} \times x$</td><td></td></tr><tr><td>第四步驟 數字乘法計算</td><td>$= -5 \times x$</td><td></td></tr><tr><td>第五步驟 乘號「\times」省略</td><td>$= -5x$</td><td></td></tr></table> <div>3. 教師引導觀察</div> <div>透過計算過程，係數間有何關聯？</div>		老師教學	學生模仿練習	題目	$3x \times 2$	$5x \times 2$	第一步驟 寫出算式中的乘號「 \times 」	$= 3 \times x \times 2$		第二步驟 使用交換律	$= 3 \times 2 \times x$		第三步驟 數字乘法計算	$= 6 \times x$		第四步驟 乘號「 \times 」省略	$= 6x$			老師教學	學生模仿練習	題目	$-3x \div \frac{3}{5}$	$2x \div \frac{4}{3}$	第一步驟 「 \div 」改「 \times 」	$= -3x \times \frac{5}{3}$		第二步驟 寫出算式中的乘號「 \times 」	$= -3 \times x \times \frac{5}{3}$		第三步驟 使用交換律	$= -3 \times \frac{5}{3} \times x$		第四步驟 數字乘法計算	$= -5 \times x$		第五步驟 乘號「 \times 」省略	$= -5x$		<div>一步驟一步驟帶領學生練習，每一步驟熟悉後，再進行下一步驟。</div> <div>模仿練習各類型題數多寡，依學生學習狀況做加減。</div> <div>引導學生能發現算式的乘除化簡，即係數相乘除。</div>
	老師教學	學生模仿練習																																						
題目	$3x \times 2$	$5x \times 2$																																						
第一步驟 寫出算式中的乘號「 \times 」	$= 3 \times x \times 2$																																							
第二步驟 使用交換律	$= 3 \times 2 \times x$																																							
第三步驟 數字乘法計算	$= 6 \times x$																																							
第四步驟 乘號「 \times 」省略	$= 6x$																																							
	老師教學	學生模仿練習																																						
題目	$-3x \div \frac{3}{5}$	$2x \div \frac{4}{3}$																																						
第一步驟 「 \div 」改「 \times 」	$= -3x \times \frac{5}{3}$																																							
第二步驟 寫出算式中的乘號「 \times 」	$= -3 \times x \times \frac{5}{3}$																																							
第三步驟 使用交換律	$= -3 \times \frac{5}{3} \times x$																																							
第四步驟 數字乘法計算	$= -5 \times x$																																							
第五步驟 乘號「 \times 」省略	$= -5x$																																							

教學活動流程設計

教學注意事項

4. 小試身手

完成小試身手五 (附件 15) 第一階段題目 (第 1 題 ~ 第 10 題)。

5. 模仿練習：利用符號表徵分配律

教師一步一步帶領學生完成學習單三 -- 式子的乘除化簡 (附件 3) 第 3 題，老師每寫完一個步驟後，讓學生模仿練習完成相關步驟。

例 3

題目	老師教學	學生模仿練習
第一步驟 括號內分項並寫出 算式中的乘號 「 \times 」	$-2(3x-1)$ 	$-3(2x+4)$
第二步驟 分配律去括號	$= 3x \times (-2)$ $-1 \times (-2)$	
第三步驟 先乘除後加減 (計算在計算紙上)	$3x \times (-2) = -6x$ $-1 \times (-2) = +2$	
第四步驟 將計算紙上計算結果寫出	$= -6x + 2$	
備註： 1. 第三步驟可引導學生將 $a \times b$, $a \times c$ 連同符號，於計算紙上分開計算。 2. 第二步驟，第三步驟可視學生學習狀況擇一可省略。		

6. 小試身手

完成小試身手五 (附件 15) 第二階段題目 (第 11 題 ~ 第 20 題)。

7. 回顧總結

(第五節課結束)

第六節課

一、算式的加減化簡：利用符號表徵分配律

1. 複習分配律

2. 模仿練習

教師一步一步帶領學生完成學習單四 -- 式子的加減化簡 (附件 4) 第 1 題與第 2 題計算，老師每寫完一個步驟後，讓學生模仿練習完成相關步驟。

依學生完成小試身手五 (附件 15) 第 1 題 ~ 第 10 題的狀況，再依學生作答狀況，決定複習或往下個概念教學。

第一步驟前，可先口頭問學生括號內有幾項？分別為那些項？圈起來
學生能正確圈出不同項後，再進行第二步驟。

第三步驟引導學生計算在計算紙上。
將第三步驟分開計算結果合併寫出。

依學生小試身手作答狀況，決定重複模仿練習或進行下一概念學習。

一步驟一步驟帶領學生練習，每一步驟熟悉後，再進行下一步驟。
模仿練習各類型題數多寡，依學生學習狀況做加減。

教學活動流程設計

教學注意事項

例 1

題目	老師教學	學生模仿練習
	$3x + 2x$	$2x + 5x$
第一步驟 寫出算式中省略的乘號「 \times 」	$= 3 \times x + 2 \times x$	
第二步驟 使用分配律	$= (3 + 2) \times x$	
第三步驟 計算內括號內算式	$= 5 \times x$	
第四步驟 乘號「 \times 」省略	$= 5x$	

例 2

題目	老師教學	學生模仿練習
	$-3x - 2x$	$2x - 5x$
第一步驟 寫出算式中的乘號「 \times 」	$= -3 \times x - 2 \times x$	
第二步驟 使用分配律	$= (-3 - 2) \times x$	
第三步驟 計算括號內算式	$= -5 \times x$	
第四步驟 乘號「 \times 」省略	$= -5x$	

3. 教師引導觀察

透過計算過程，係數間有何關聯？

4. 小試身手

完成小試身手六 (附件 16) 第一階段題目 (第 1 題 ~ 第 10 題)

5. 模仿練習

教師一步一步帶領學生完成學習單四 -- 式子的加減化簡 (附件 4) 第 3 題、第 4 題，老師每寫完一個步驟後，讓學生模仿練習完成相關步驟。

引導學生能發現 x 項部分做加減時，即係數相加減。

依學生小試身手作答狀況，決定重複模仿練習或進行下一概念學習。

一步驟一步驟帶領學生練習，每一步驟熟悉後，再進行下一步驟。

模仿練習各類型題數多寡，依學生學習狀況做加減。

教學活動流程設計

教學注意事項

例 3

題目	老師教學	學生模仿練習
第一步驟 去括號	$(3x + 1) + (2x + 3)$ $= 3x + 1 + 2x + 3$	$(2x + 4) + (5x + 3)$
第二步驟 利用交換律將同類項歸類	$= 3x + 2x + 1 + 3$	
第三步驟 同類項合併	$3x + 2x = 5x$ $+ 1 + 3 = +4$	
第四步驟 將計算紙上計算結果寫出	$= 5x + 4$	
備註： 1. 第三步驟引導學生將同類項連同性質符號寫於計算紙上計算，並以分配律說明同類項合併概念。 2. 第二步驟，第三步驟可視學生學習狀況擇一可省略。		

例 4

題目	老師教學	學生模仿練習
第一步驟 拆解項後寫在計算紙上	$-2(3x + 1)$ $-3(2x + 3)$	$2(2x + 4) - (5x + 3)$
第二步驟 利用分配律去括號	$-2(3x + 1) = -6x - 2$ $-(-2x + 3) = +2x - 3$	
第三步驟 將第二步驟計算結果合併寫在題目卷上	$-2(3x + 1) - (-2x + 3)$ $= -6x - 2 + 2x - 3$	
第四步驟 同類項合併	$= -4x - 5$	
備註： 1. 第一步驟拆解項是先簡化題目，讓學生容易計算。 2. 第二步驟將寫在計算紙上的兩項分別計算，學生若不會算，需先複習附件九概念。		

6. 小試身手

完成小試身手六 (附件 16) 第二階段題目 (第 11 題 ~ 第 15 題)。

二、再回首 -- 加深學習概念

學完「代數符號及式子化簡」，回頭看 < 計算 $6 \div 2(1+2)$ 的值 > 為什麼結果會有爭議？請說說看

$\begin{aligned} & 6 \div 2(1+2) \\ &= \frac{6}{2(1+2)} \\ &= \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 6 \div 2(1+2) \\ &= 3(1+2) \\ &= 3 \times 3 = 9 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 6 \div 2(1+2) \\ &= 6 \div 2 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 6 \div 2 + 4 \\ &= 3 + 4 = 7 \end{aligned}$
--	---	---

完成第一步驟後，可口頭問學生那些為同類項？學生能正確分辨同類項後，再進行下一步驟

底色反灰部分，代表此部分需引導學生計算在計算紙上。

學生對含括號的式子化簡，在計算的先後關係上容易混亂，利用逐步拆解方式，降低學習恐懼。

須注意學生在第三步驟時，是否能將第二步驟計算結果正確合併寫出。

依學生小試身手作答狀況，決定重複模仿練習或進行下一概念學習。

請學生共同討論

藉此讓學生知道網路世界的真真假假

教學活動流程設計

三、我是預言家

複習代數符號及式子化簡並介紹一元一次方程式

1. 七嘴八舌

老師說：暑假快到了，各位同學你們最想去下圖 3 中哪個地點旅遊？又最不想在哪個地點旅遊？

1 台灣	10 杜拜
2 新加坡	11 韓國
3 英國	12 泰國
4 北極	13 美國
5 德國	14 菲律賓
6 日本	15 越南
7 北韓	16 紐西蘭
8 馬爾地夫	17 法國
9 待在家	18 伊拉克

圖 3

2. 預知旅遊地

教師說：我掐指一算，我可以預知你們都是「9 待在家」的宿命
(學生此時會不服氣)

3. 心想事成

請學生依底下步驟來預知自己是否能心想事成？

- (1) 在 1~9 中想一個數
- (2) 把 (1) 所想的數 $\times 3$
- (3) 將 (2) 所得的數 $+3$
- (4) 再將 (3) 所算出來的數 $\times 3$
- (5) 將 (4) 所得兩位數中的個位數與十位數相加
- (6) 將 (5) 所得數字比對上圖 3，即可預知旅遊地點

4. 算式比比看：將學生的算式擺在一起比比看。

教師提問 1：算式差異點在那？

(讓學生察覺差異點在 (1) 心中所想的數)

教學注意事項

讓學生從 1~18 中選擇喜歡的地點與不喜歡的地點各 1 個

預知你下次旅行的目的地

方法

- 1 在 1~9 中選一個數字
- 2 把這個數字 $\times 3$
- 3 再 $+3$
- 4 再 $\times 3$

- 5 將十位數和個位數相加 (例: $20 \rightarrow 2+0=2$)
- 6 得到結果

目的地

- 1 台灣
- 2 新加坡
- 3 英國
- 4 北極
- 5 德國
- 6 日本
- 7 北韓
- 8 馬爾地夫
- 9 待在家

- 10 杜拜
- 11 韓國
- 12 泰國
- 13 美國
- 14 菲律賓
- 15 越南
- 16 紐西蘭
- 17 法國
- 18 伊拉克

Skyscanner

圖片來源：

<https://forum.hkgolden.com/thread/7222982/page/1>



可與學生討論為何都對應到 9 待在家

教學活動流程設計	教學注意事項								
<p>教師提問 2：若將 1~9 中想一個數的數字以 x 表示，則 (1)~(4) 步驟的過程可列出算式為何？化簡後算式為何？將其寫於學習單五 (附件 5) 我是預言家。</p> <p>(複習以符號列式及式子的值)</p> <p>教師提問 3：為何你們都是心想事不成呢？</p> <p>5. 結論</p> <p>教師說明：將 (1) 在 1~9 中想一個數的數字以 x 表示，則所列的算式為一元一次式，帶入數字所計算出的結果為式子的值</p> <p>四、心想事成</p> <p>修訂方法：目的地代號不變 (圖 3)，我們來修訂方法中 (2)~(5) 步驟，讓自己能心想事成。</p> <p>1. 請學生寫出其修訂 (2)~(5) 的方法。</p> <p>2. 將心中所想的數以 x 表示，寫成算式並填入學習單五 (附件 5) 心想事成表格內。</p> <p>3. 將自己心中目的地代號填入下表表格中。</p> <p>4. 教師提問：旅遊目的地方法算式最終目標即希望得到目的地代號，所以旅遊目的地算式與目的地代號有甚麼關係？</p> <p>(引導學生將關係填入「算式 => 代號」格子中)</p> <p>5. 此時心中所想的數是哪個數字？填入下表表格中。</p> <table><tr><th>旅遊目的地方法算式</th><th>目的地代號</th><th>算式=>代號</th><th>心中所想的數</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> <p>6. 概念說明</p> <p>旅遊目的地方法算式 => 一元一次式</p> <p>算式與代號關係式 => 一元一次方程式</p> <p>心中所想的數 (x 值) => 一元一次方程式的解</p> <p>範例：(1) 在 1~9 中想一個數</p> <p>(2) 把 (1) 所想的數 $\times 3$</p>	旅遊目的地方法算式	目的地代號	算式=>代號	心中所想的數					<p>學生修改方法時，在旁協助，引導學生都能有自己的旅遊目的地方法。</p> <p>依學生程度，可讓學生將旅遊目的地方法簡化。如：</p> <p>(1) 在 1~9 中想一個數</p> <p>(2) 把 (1) 所想的數 $\times 3$，即可預知旅遊地點。</p>
旅遊目的地方法算式	目的地代號	算式=>代號	心中所想的數						

教學活動流程設計	教學注意事項								
<p>(3) 將 (2) 所得的數 +12</p> <p>(4) 再將 (3) 所算出來的數 ÷3</p> <p>(5) 則 (4) 所得數，即可預知旅遊地點</p> <table border="1"><thead><tr><th>旅遊目的地 方法算式</th><th>目的地 代號</th><th>算式=> 代號</th><th>心中所 想的數</th></tr></thead><tbody><tr><td>$\frac{3x+12}{3}$</td><td>6</td><td>$\frac{3x+12}{3}=6$</td><td>2</td></tr></tbody></table> <p>$\frac{3x+12}{3} \Rightarrow$一元一次式</p> <p>$\frac{3x+12}{3}=6 \Rightarrow$一元一次方程式</p> <p>$x=2 \Rightarrow$一元一次方程式的解</p> <p>7. 發表</p> <p>讓學生發表其修改的旅遊目的地方法，並展現自己的表格</p> <p>學生一邊發表時，老師一邊提問所以哪個是一元一次式？哪個是一元一次方程式？或一元一次式與一元一次方程式有何差別？……</p> <p>他心中所想的數可以達到其目的地代號嗎？</p> <p>8. 總結</p> <p>以學生回答來複習一元一次式及引入一元一次方程式及其解的意義概念。</p> <p>(第六節課結束)</p>	旅遊目的地 方法算式	目的地 代號	算式=> 代號	心中所 想的數	$\frac{3x+12}{3}$	6	$\frac{3x+12}{3}=6$	2	<p>引導學生能說出旅遊目的地算式最終目標即是目的地代號，所以兩者相等</p> <p>鼓勵學生回答</p>
旅遊目的地 方法算式	目的地 代號	算式=> 代號	心中所 想的數						
$\frac{3x+12}{3}$	6	$\frac{3x+12}{3}=6$	2						

附件	<ul style="list-style-type: none"> · 附件 1-0 集點卡。 · 附件 1~5：學習單。 · 附件 6~10：課堂練習。 · 附件 11~16：小試身手。 · 附件 17：字卡(參考使用)。 · 附件 18：前測。 · 附件 19：後測。
----	--



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

評量 工具



一、口頭提問

提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 I-1- 二 2-1	老師先從甲袋中先拿出 5 枚棋子，再從乙袋中拿出 3 枚棋子，放在桌子上，跟先從甲袋中拿出 3 枚棋子，再從乙袋中拿出 5 枚棋子，放在桌子上，兩次拿出的棋子總枚數會相同嗎？怎麼列式？	圍棋棋子 (需同色)
主題 I-1- 二 2-2	老師先從甲袋中拿出 12 枚棋子，再從乙袋中拿出 3 枚棋子，放在桌子上，跟從甲袋中拿出 3 枚棋子，再從乙袋中拿出 12 枚棋子，放在桌子上，兩堆棋子個數相同嗎？怎麼列式？	
主題 I-1- 二 2-3	現在老師先從甲袋中拿出 x 枚，再從乙袋中拿出 3 枚棋子，所以老師從甲袋跟乙袋內依先後順序，拿出來棋子的總枚數可列式為何？	
主題 I-1- 二 2-4	老師先從甲袋中拿出 3 枚棋子，再從乙袋中拿出 x 枚棋子，這時老師從甲袋跟乙袋內依先後順序，拿出來棋子的總枚數可列式為何？	
主題 I-1- 四 2-1	右邊切割後兩個長方形的個數分別如何表示？	學習單二
主題 I-1- 四 2-2	兩個長方形的個數與原長方形有何關係？	
主題 II-2- 一 5-1	為什麼通關密語書寫在黑板上時，你們會唸出不一樣的密語？	通關密語 遊戲活動
主題 II-2- 一 5-2	「 \times 」與「 x 」容易混淆，如何處理？	
主題 III-3- 一 1-1	各位同學，你們今年幾歲？5 年前的你們是幾歲？怎麼計算？	
主題 III-3- 一 1-2	這盒粉筆現在盒內有 10 枝粉筆，老師拿走 1 枝使用，現在盒子內剩幾枝粉筆？	
主題 III-3- 一 1-3	老師手上這袋糖果，分給學生每人 1 顆後，袋子內會剩下幾顆糖果？	
主題 III-3- 二 1-1	若袋內有 50 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，則袋子內會剩下幾顆糖果？如何列式？	

提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 III-3- 二 1-2	若袋內有 25 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，則袋子內會剩下幾顆糖果？如何列式？	
主題 III-3- 一 1-3	若袋內有 13 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，則袋子內會剩下幾顆糖果？如何列式？	
主題 III-3- 一 1-4	若袋內有 x 顆糖果，學生有 10 人，分給學生每人 1 顆後，怎則袋子內會剩下幾顆糖果？如何列式？	
主題 V-6- 三 4-1	算式差異點在那？	學習單 3
主題 V-6- 三 4-2	若將 1~9 中想一個數的數字以 x 表示，則 (1)~(4) 步驟的過程可列出算式為何？化簡後算式為何？	
主題 V-6- 三 4-3	為何你們都是心想事不成呢？	

二、前測、後測

1. 前測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	1. 式子的值 (1) 當 $x=2$ 時，則 $3-2x$ 的值 = _____ (2) 當 $x=-5$ 時，則 $3x-11$ 的值 = _____	進行教學前
	A-7-1 代數符號：能以數字代入算式中的文字符號並計算其值	
第 2 大題	2. 以文字符號列式 (1) 水餃每顆 x 元， <u>小明</u> 買了 8 顆水餃，付了 100 元給老闆，則老闆應找小明 _____ 元。(以 x 表示) (2) 將一包糖果平分給 x 位同學，每人可得 4 顆，還剩下 5 顆，則這包糖果共有糖果 _____ 顆。(以 x 表示)	
	A-7-1 代數符號：以符號紀錄生活中的情境問題	
第 3 大題	3. 化簡下列各式： (1) $-3x-4+2x-1=$ _____ (2) $-2(x-3)=$ _____ (3) $5x-2-3(-2x-4)=$ _____	
	A-7-1 代數符號：一次式的化簡及同類項	

2. 後測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	1. 式子的值 (1) 當 $x=3$ 時，則 $-3x+5$ 的值 = _____ (2) 當 $x=-2$ 時，則 $6-5x$ 的值 = _____	可於第 3 節 課後實施
	A-7-1 代數符號：能以數字代入算式中的文字符號並計算其值	
第 2 大題	2. 以文字符號列式 (1) 一個披薩 x 元，一瓶汽水 25 元，小明買了 2 個披薩及 1 瓶汽水，則小明共付了 _____ 元。(以 x 表示) (2) 一個雞腿便當的價錢是一碗滷肉飯的 3 倍少 5 元，如果一個雞腿便當是 x 元，則一碗滷肉飯價錢是 _____ 元。(以 x 表示)	可於第 4 節 課後實施
	A-7-1 代數符號：以符號紀錄生活中的情境問題	
第 3 大題	3. 化簡下列各式： (1) $-5x+3-2x-1=$ _____ (2) $-2(-x+3)=$ _____ (3) $3x+1-2(-3x-2)=$ _____	可於第 6 節 課後實施
	A-7-1 代數符號：一次式的化簡及同類項	

三、附件：

附件	位置	核心概念	建議使用時間
學習單	附件 1	以符號表徵交換律	主題 I
	附件 2	以符號表徵分配律	
	附件 3	式子乘除化簡	主題 V(第 5 節課)
	附件 4	式子加減化簡	主題 V(第 6 節課)
	附件 5	一元一次方程式及其解的介紹	主題 V(第 6 節課)
課堂練習	附件 6	符號簡記—乘號「 \times 」省略	主題 II
	附件 7	符號簡記—理解 $2a$ 表示 $2 \times a$ 、 $2 \cdot a$ 、 $a \times 2$	
	附件 8	以符號紀錄生活中的情境問題(表格分析)	主題 III
	附件 9	以符號紀錄生活中的情境問題	主題 IV
	附件 10	以符號紀錄生活中的情境問題(數線分析)	
小試身手	附件 11	符號簡記—乘號「 \times 」省略	附件 6 課堂練習後

附件	位置	核心概念	建議使用時間
小試身手	附件 12	符號簡記—理解 $2a$ 表示 $2 \times a$ 、 $2 \cdot a$ 、 $a \times 2$	附件 7 課堂練習後
	附件 13	以符號紀錄生活中的簡易情境問題	附件 8 課堂練習後
	附件 14	以符號紀錄生活中的情境問題	附件 10 課堂練習後
	附件 15	式子乘除化簡	附件 3 學習單教學後
	附件 16	式子加減化簡	附件 4 學習單教學後

教學反思 應用建議



「一元一次式」概念，是學生進入抽象代數學習的源頭，但許多學校教師大部分時間都著重於「等量公理」部分。於是，課堂中對於「一元一次式」單元教學就急於趕課，寧可全部概念教學完後再追加複習，在此趕課的狀況下，原班的授課教師就無法一一檢視學生的學習情形。利用暑假實體上課，加強學生進行代數符號及一元一次式的整理與化簡。本補強課程模組選擇雲林縣某一國中的學習扶助班級進行試行，參與課程的五位學生在原班級的數學測驗均呈現明顯落後（段考成績皆不到 40 分），甚至不理解「 $2x$ 」是「 $2 \times x$ 」中乘號「 \times 」省略而來的，這些學生雖然成績不理想，但自願在暑假下午參加學習扶助課程的計畫教學。以往補強教學的重心多放在協助學生熟練解一元一次方程式的計算練習。本補強課程模組考量及七年級的代數基本觀念是整個國中數學學習的重要基石，故本次特以建立、澄清學生對代數式的基本概念與運算。期待對學生往後的代數學習有較良好的助益。

一、學生表現

（一）前測成績表現

	1. 式子的值		2. 以文字符號列式		3. 化簡下列各式			正確率 (%)
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(3)	
學生 A	X	X	O	X	O	O	O	54.1
學生 B	X	X	O	X	X	O	X	28.6
學生 C	X	X	O	X	X	X	X	14.3
學生 D	O	X	O	X	X	X	X	28.6
學生 E	O	O	O	X	X	X	X	42.6
答對比率 (%)	40	20	100	0	20	40	20	

(二) 後測成績表現

	1. 式子的值		2. 以文字符號列式		3. 化簡下列各式			正確率 (%)
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(3)	
學生 A	O	O	O	O	O	O	O	100
學生 B	O	O	X	X	O	O	O	71.4
學生 C	O	O	O	X	X	O	O	71.4
學生 D	O	O	X	X	X	O	X	42.6
學生 E	X	O	O	X	X	O	X	42.6
答對比率 (%)	80	100	60	20	40	100	60	

(三) 前、後測結果比較

- (1) 「式子的值」部分，整體答對率有很顯著的進步，顯示在教學上以提問慢慢引導學生思考，能建立學生數值帶入計算的概念。
- (2) 「以文字符號列式」第 (1) 題，前測僅水餃一項物品，學生都能正確列式，顯示學生能輕易對單一物品的應用問題列式。但在後測改成有披薩跟汽水兩項物品時，有兩位同學無法準確列出，過多資訊，仍會造成學生混淆。
- (3) 「以文字符號列式」第 (2) 題，後測題目「一個雞腿便當的價錢是一碗滷肉飯的 3 倍少 5 元，如果一個雞腿便當是 x 元，則一碗滷肉飯價錢是___元。(以 x 表示)」比前測題目「將一包糖果平分給 x 位同學，每人可得 4 顆，還剩下 5 顆，則這包糖果共有糖果___顆。(以 x 表示)」還難，仍有一位學生正確，但整體隊概念分析表現不佳。
- (4) 「化簡下列各式」各小題答對率都有進步，尤其在第 (2) 小題「去括號」部分表現最明顯，學生反應，這部分讓他們慢慢模仿練習，且採用拆解方式先到計算紙計算後再合併，對他們符號的錯誤率降低。

二、教學情形

(一) 基本代數式觀念的建立

1. 本模組課程利用網路流傳的運算式 $[6 \div 2(1+2)]$ 的結果，除了要引發學生的討論，同時也為稍後要介紹的 [省略乘號] 進行布局。數字簡單容易計算，學生便願意動手計算並表達自己的想法與理由。透過學生計算及其分享，結果有下列數種：

$$(1) \quad 6 \div 2(1+2) = 6 \div (2+4) = 6 \div 6 = 1$$

此計算方式是我們預料之中，也是網路中討論最多的答案之一

$$(2) 6 \div 2(1+2) = 6 \div 2 \times 3 = 6 \div 6 = 1$$

$6 \div 2(1+2) = 6 \div 2 \times 3$ ，這部分算式是我們可預知的，但學生對四則運算先乘除後加減中，誤解先乘除為先乘再除

$$(3) 6 \div 2(1+2) = 3 + 3 = 6$$

學生將 $2(1+2)$ 與帶分數概念混淆，認為 $2(1+2) = 2 + (1+2)$ ，因此 $6 \div 2(1+2) = 6 \div 2 + 3$ ，再利用先乘除後加減計算

$$(4) 6 \div 2(\widehat{1+2}) = 6 \div (3+4) = 6 \div 7 = \frac{6}{7}$$

由學生算式 $2(\widehat{1+2})$ 記號，可知有去括號基本概念，但將 $2(1+2)$ 視為 $(2+1) + (2+2)$

$$(5) 6 \div 2(1+2) = 6 \div (2+3) = 6 \div 5 = \frac{6}{5}$$

學生將 $2(1+2)$ 與帶分數概念混淆並且運用四則運算中規則有括號先計算括號，計算 $2(1+2) = [2 + (1+2)] = 5$

從計算過程可知，學生對乘號「 \times 」省略概念沒有全盤理解，同時對四則運算也不熟。

2. 從圍棋子的具體操作，讓學生複習國小所學交換律及分配律。進而引入代數符號表徵的交換律及分配律。讓學員從直觀的體驗進入抽象學習，透過操作問答，學生較能體會代數符號的表徵。
3. 介紹科學史上 x 光的發現經過與命名由來，幫助學生複習 [以 x 代表未知數] 的脈絡。
4. 附件四符號建記的練習：以往課本的設計是讓學生練習將算式的乘號省略，但這一次教材也反倒設計，請學生將簡記後的算式，思考可能是那些情形？如 $3x = 3 \times x = x \times 3 = x + x + x = 3 \cdot x = \dots$ 。發現學生對 $3 \times x$ 中乘號「 \times 」省略記為 $3x$ ，看之沒問題，但反推時，常忘記 $3x$ 中 3 與 x 間是乘號「 \times 」省略，可寫為 $3x = 3 \times x$ 需思考甚久，藉此這樣的設計讓學生可澄清或複習有關乘號省略的記法。

(二) 文字符號列式及式子化簡部分

1. 附件六、七、八，除了讓學生利用繪製數線圖的方式明白列式的意義外，也透過表格，讓學生理解不同的 x 值代入代數式中，也會得到不同的結果值。讓學生體會代數式是一種 [關係的陳述]，可作為對後續學習一次函數的基石概念。
2. 代數式的化簡，利用學生已建立好的 [分配律 + 交換律 + 同類項合併] 基礎能力，一步一步帶領學生操作。為減輕學生計算負荷，可先由正整數係數與正整數乘數為主要內容。待學生熟悉之後，再引入負整數係數或負整數乘數的題型。

3. 最後結束前的統整活動 [一定待在家]，讓學生體會數學素養的重要性，透過一元一次式的列式與化簡，能解出會什麼一定待在家的秘密。

三、教學反思與建議

(一) 反思

1. 主題 V 模仿練習教學：利用分配律化簡一次式時，在模仿練習操作題附件九第 3 題，以「 $-2(3x-1)$ 」為範例，引導學生以「 $-3(2x+4)$ 」來練習時，學生不是 -3 忘記乘 4，就是忽略運算符號，將 -3 以 +3 來計算。探究原因，在教學設計上操之過急，學生剛學會利用代數符號表徵 $a(b+c)$ ，運用在計算還不純熟，常在計算中忘記 a 也要乘 c ，此時又將 a 值位置放置負數，所以讓學生手忙腳亂。
2. 代數符號課堂教學中，常認為乘號「 \times 」省略概念很簡單，學生也理解「 $3 \times x = 3x$ 」就是將「 \times 」不要寫，所以乘號「 \times 」省略概念在課堂中常很快被帶過。但試行教學過程中，發現學生有「 $3+x=3x$ 」的迷思概念，顯示學生不理解符號的約定。
3. 設計本模組時，希望能在學完代數符號及一元一次式單元後，藉由網路話題引入一元一次方程式，希望學生能清楚理解「一元一次式」與「一元一次方程式」之間的異同，但模仿練習時，常因學生學習狀況需反覆做練習，導致在「我是預言家」活動中時間有限，無法達成預定效果。
4. 活動 V「模仿練習」活動，帶領學生一步一步熟悉一元一次式化簡，在授課時，急於說明，沒有給足學生思考的時間，以至於學生練習不足，後測成效不如預期。

(二) 建議

1. 降低學習門檻

- (1) 先由正整數係數與正整數乘數為主要內容。待學生熟悉之後，再引入負整數係數或負整數乘數的題型。

例：在 $-2(3x-1)$ 模仿教學時，發現學生學習仍有困難，因此先降低題目難度為 $2(3x+1)$

- (2) 對正整數係數與正整數乘數仍不熟悉時，佐以實物教學說明

例：準備一模一樣的藍色原子筆與紅色原子筆各數枝，將 3 枝藍色原子筆與 1 枝紅色原子筆放在袋子內，然後告訴學生：每袋裝一樣的我需要 2 袋。需

要 3 袋……。以 3 枝藍色原子筆表示 $3x$ ，1 枝紅色原子筆表示 $+1$ ，2 袋表示 $2(3x+1)$ 。讓學生在裝袋中理解 2 袋共需藍色原子筆 3×2 枝，紅色原子筆 1×2 枝，即 $2(3x+1)=3x \times 2+1 \times 2$

2. 調整活動順序

活動設計每單元可獨立運用，可依學生學習狀況調整活動先後順序。

例：在主題 I 加法交換律活動過程中，學生說出： $x+3=3+x=3x$ 時，立即將活動 II 乘號「 \times 」省略部分，挪前先說明，以避免學生建立錯誤觀念。

3. 調整教學內容

為了讓學生能分辨一元一次式與一元一次方程式的差別，所以在第 6 節課引入「四、心想事成」活動。依學生學習狀況考量，若時間有限，則第 6 節課中「四、心想事成：」可省略不教或在之後課堂說明，以讓學生熟悉式子的化簡為優先。

4. 給予充裕時間

藉由活動 V「模仿練習」活動，帶領學生一步一步熟悉一元一次式化簡，依學生學習狀況，給予充裕思考時間，讓學生逐步扎實的思考並練習，以達成效。

參考文獻

- 王志銘，唐淑娟 (2006)。等量公理前置教學活動之實踐與探究。台灣數學教師電子期刊，**8**，21-40。https://doi.org/10.6610/ETJMT.20061201.04
- 林碧珍 (2003)。生活情境中的數學。新竹縣教育研究集刊，**3**，1-26。
- Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, **18**, 32-41.

國中數學領域 補強課程模組 3

七年級

統計圖表與統計數據

- 臺中市立溪南國民中學 張廷吉組長
- 臺中市立五權國民中學 莊佶達教師

設計
理念

這是一個大數據的時代，生活中充滿了各式各樣的統計圖表與統計數據。舉例來說，這兩年新冠肺炎流行，疫情指揮中心為了讓民眾更了解疫情的發展，發布許多統計圖表與統計數據，其中就包含了長條圖、圓形圖、折線圖、地理分布圖、累積確診數、累計死亡數...等統計圖表。因此，能看懂統計圖表與統計數據所代表的意義已成為現今公民必須擁有的技能。Rumsey（2002）認為，教育工作者應思考如何讓學生成為好的「統計公民」，所謂「好的統計公民」是指在這個訊息泛濫的年代中，有足夠的能力去理解統計相關資訊，並利用所得到的資訊作批判性的思考與良好的判斷。

長久以來，數學被認為是最難學且孩子最害怕的一門課程，也常常被認為無法運用於生活情境中，有些數學問題甚至只會出現在數學考卷中，數學知識與現實生活似乎脫節，造成孩子們排斥數學的狀況。可是，數學卻被公認為科學之母，造成此落差有諸多因素，然而身為數學老師的我們，可以盡已之力，彌平這之間的落差，讓孩子聚焦於數學知識的核心素養，從孩子最直觀的角度，從生活體驗裡面去萃取出數學的元素，數學的操作，數學的想法，然後變成數學語言，再帶著數學知識用回到生活之中。因此，本模組將邀請您跟我們一起來理解這源自於生活體驗的數學知識，以及如何透過適當的概念發展轉化，協助孩子理解為什麼需要學習與學得知識，並用回生活之中。

本補強課程模組的設計，透過「資料大搜查」的活動貫穿整個教學脈絡，讓學生收集家人的相關數據資料；再透過遊戲化的過程，依序實踐「看得懂長條圖」、「算得出圓形圖」、「說得清折線圖」等活動，幫學生回顧國小時所學過的統計相關課程內容，再以「為什麼我們需要統計圖表」、「多媒體教學與資源」、「比較活動」引入平均數的概念教學、運用「圖像表徵」的方式，幫助學生理解中位數的意義，進一步強化學生

的統計思考，透過真實的資料進行統計教學，可建立學生對資料的直覺，啟發學生主動且逐步地思考統計程序。其實，藉由學生調查的真實資料，是可以使學生可在現實生活的情境脈絡下，進行有意義的統計學習。

本補強課程模組嘗試以遊戲包裝教學活動，讓學生在活潑、愉快的遊戲情境中學習數學，藉由遊戲積點的方式，協助學生學習：能報讀生活情境中分類的統計圖表、能理解列聯表及解決日常生活中的問題、能從資料中找到眾數、計算平均數、中位數，並解決簡單平均數、中位數問題，進一步能夠整理多筆的資料並選取適當的表示方式。在遊戲競賽的過程中，也可培養學生小組合作的數學學習態度及相互溝通、協調的能力，進一步解決生活情境中的問題，最後再以數感同心圓的方式結尾。期望學生能藉由生活情境的問題，在遊戲的氛圍下，提高學習興趣，感受並體會到學會數學知識的快樂。

課程架構

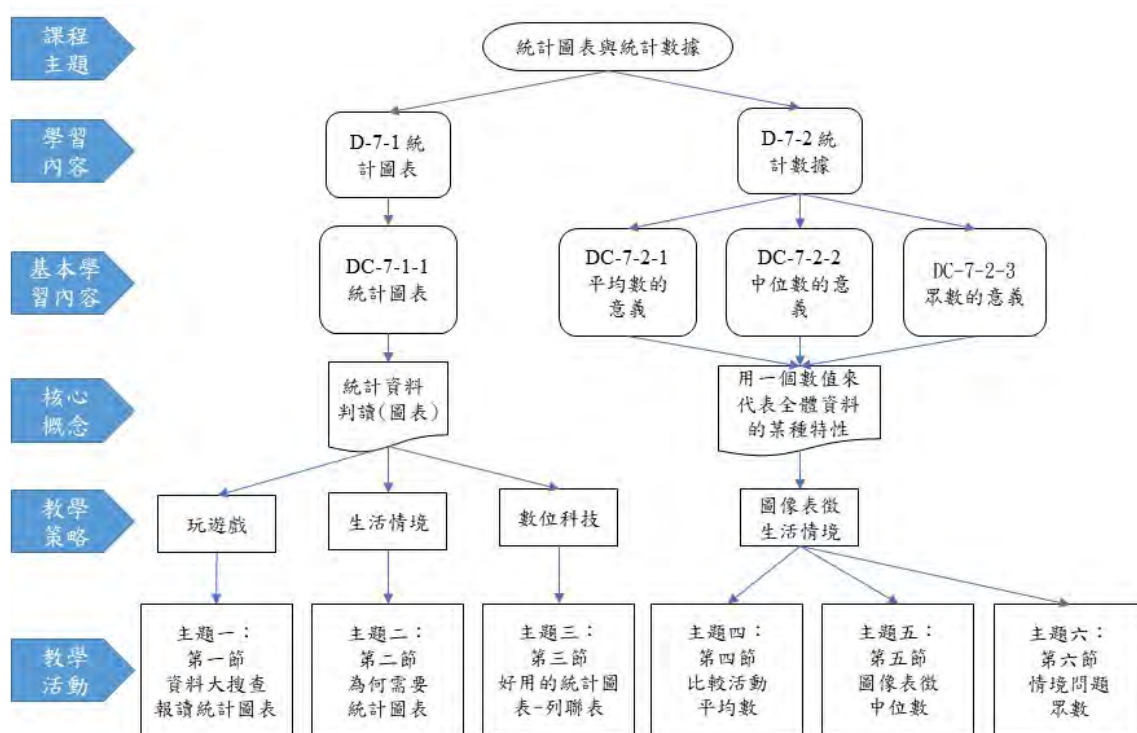


圖 1：課程架構圖

- (一) 主題一【閱讀生活中的圖表】(第一節課)：透過資料大搜查、看得懂長條圖、說得清折線圖、算得出圓形圖來幫學生回顧國小時所學過的統計圖表(長條圖、折線圖、圓形圖)，並能夠讀取在當中所想要知道的資訊。

- (二) 主題二【為何需要統計圖表？】(第二節課)：透過生活情境中的實例，說明如何將資料整理、分析，整理出好用的資訊；這些資訊在透過視覺化產生圖表，可以讓我們進一步來進行推論與比較。
- (三) 主題三【好用的圖表】(第三節課)：透過觀看均一教育平臺【觀念 - 列聯表】的影片，知道列聯表是一種二維數據表格，適合用於表現離散的類別型資料，其『欄』與『列』是同一母群體的兩種分割，並在每一欄的最下方、每一列的最右方做『合計』，表格的右下角做『總計』，進一步利用列聯表整理相關的資料(學習分組、劃記、登錄出重點數值)。
- (四) 主題四【比較活動 - 平均數】(第四節課)：透過「比較活動」引入平均數的教學，讓孩子知道要進行比較時，需要選擇哪一個代表數比較恰當。因此，我們若想用一個數值來概述整個群體，平均數是比較好的選擇。
- (五) 主題五【圖像表徵 - 中位數】(第五節課)：透過「圖像表徵」讓孩子理解中位數左邊資料個數與右邊資料個數相同，「中位數」的值是用來平均分割資料數的數字，再透過生活實例讓孩子知道中位數不像平均數會受極端值的影響。
- (六) 主題六【情境問題 - 眾數】(第六節課)：透過生活情境讓孩子知道眾數在進行民意調查和非數字的資料時非常好用的，如全班最喜歡班服顏色是黑色，喜歡黑色的人數比較多。正確與合理使用平均數、眾數、與中位數來替代整筆資料，讓學生了解資料的集中程度與數據大小，方便做比較。

綜合來說，本補強課程模組期望學生達成的目標如下：

1. 能知道各種圖表的特點並能依需求選擇適切的圖表呈現資料。
2. 能以平均數作為整組數據的代表。
3. 能以中位數與眾數呈現資料的特徵並知道使用時機。

教材 分析



(一) 補強課程模組之重要性

統計數據與統計圖表是現代日常生活當中，一般人在報章雜誌或網路資料當中常見資料分析的呈現方式，而對於資料的判讀是閱讀者最需要的能力，能夠從讀表中看出資料的集中程度與分布後，也能夠知道平均數、中位數、眾數的形成的方式，知道在不同的情況或需求下，該利用哪一個數呈現較能夠適切，以下是統計資料在國小、國中學習間的歷程如圖 2。

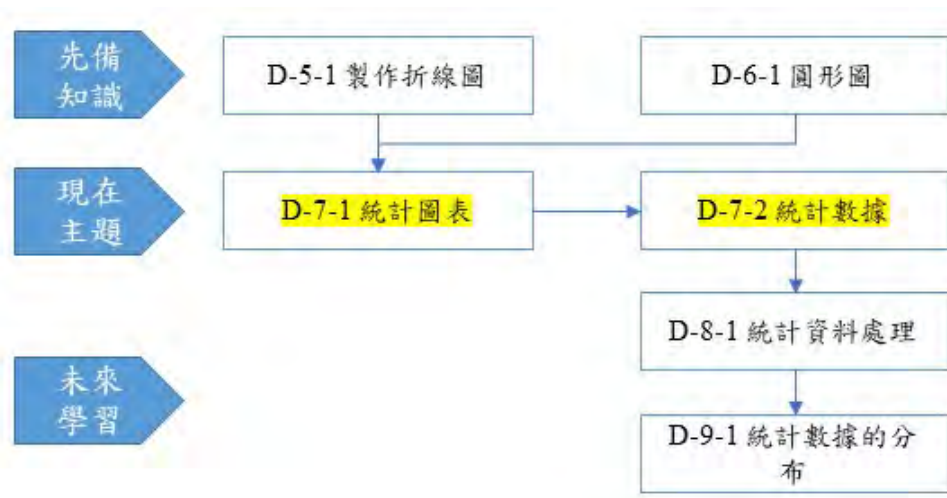


圖 2：補強課程模組學習內容與其他年級學習內容間的關係圖

(二) 補強課程模組之內容分析

本模組教材學習內容，主要為「統計圖表」與「統計數據」，希望學生在生活情境中或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。本模組教材基本學習內容，如圖 3。

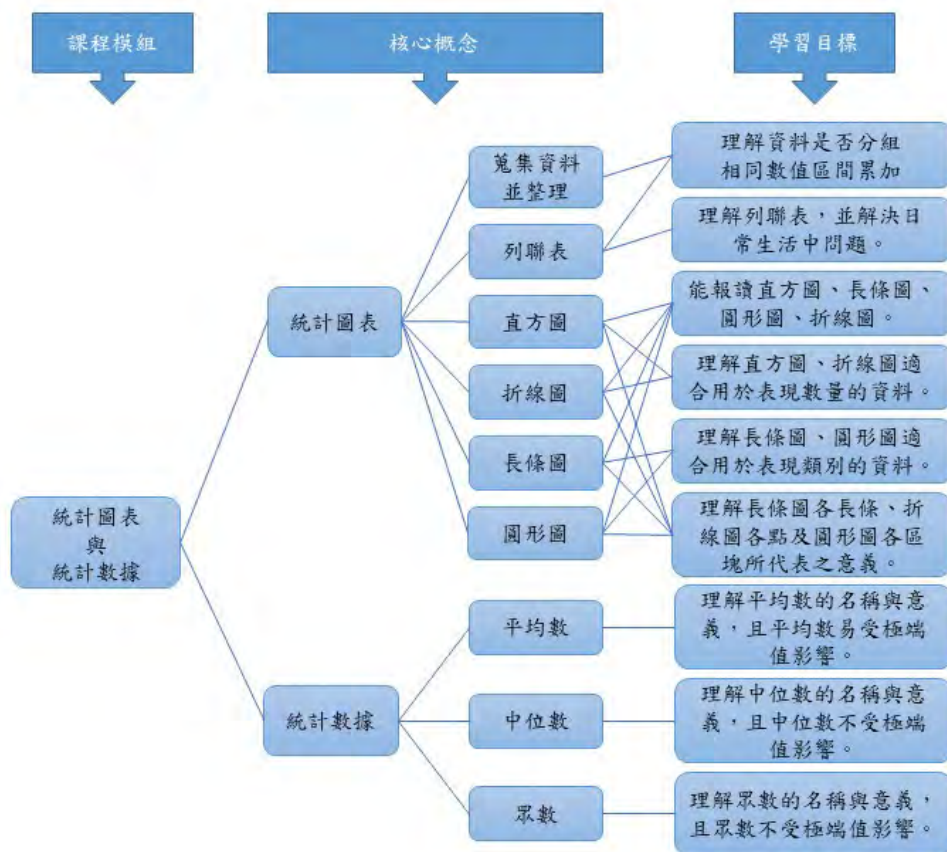


圖 3：單元主題教材內容分析

(三) 教材分析與課程架構的關係

本補強課程模組包含統計圖表及統計數據兩個部分。其中，統計圖表部分是將大數據以最簡單、最明瞭的方式，利用適當的表格化呈現與統計圖呈現量的關係情形；而統計數據則分以不同的數值代表資料分佈的情形，本補強課程模組的例子之鋪陳，盡量以學生周遭的生活例子作為起點，融入教科書有關統計圖表與統計情形數據的內容，讓學生對問題內容覺得有感而不害怕。

下表 1 是本補強課程模組教材分析與課程架構之關係性說明。

表 1：本補強課程模組教材分析與課程架構之關係性說明

課程模組核心概念	學習活動	教學策略	教學內涵
主題 I. 資料大搜查 主題 II. 看得懂說得清 算得出統計圖 主題 III. 為何要用統計圖	報讀統計圖表	生活情境	學習單中呈現學生周遭可以收集到的相關資訊，藉此複習國小時段學過的長條圖、折線圖與圓形圖。
	為什麼需要統計圖表？	數位科技	Excel 是學生電腦課中，用來進行統計資料的有用軟體之一。當他們 key 入資料時就已開始學習列聯表；在試圖調整連接長條圖時，即已試著探討連續量資料。
	好用紀錄圖表	圖像表徵 線上學習	長條圖、直方圖、折線圖、圓形圖等統計圖表，使用的時機與圖形的意義。
統計數據	比較活動 - 平均數	生活情境	日常生活最常見的平均數，資料量多時將很難算，可以利用分組與多退少補方式運算。
	圖像表徵 - 中位數	圖像表徵	整組資料的正中間，完全可避免資料發生極大或極小時利用平均量時的誤差。
	情境問題 - 眾數	生活情境	資料中單一數值最大量的呈現。

教學計畫



模組名稱	統計圖表與統計數據
授課節數規劃	七節課
學習重點 (內容、概念、能力)	學習內容 D-7-1 統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。 D-7-2 統計數據：用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。
	學習表現 d-IV-1 理解常用統計圖表，並能運用簡單統計量分析資料的特性及使用統計軟體的資訊表徵，與人溝通。 d-IV-2 理解機率的意義，能以機率表示不確定性和以樹狀圖分析所有的可能性，並能應用機率到簡單的日常生活情境解決問題。
	基本學習內容 DC-7-1-1 統計圖表 DC-7-2-1 平均數的意義。 DC-7-2-2 中位數的意義。 DC-7-2-3 眾數的意義。
	基本學習表現 DCP-7-1-1-1 理解直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖的名稱與使用時機。 DCP-7-1-1-2 能報讀直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖。 DCP-7-1-1-3 理解長條圖、圓形圖適合用於表現類別的資料。 DCP-7-1-1-4 理解直方圖、折線圖適合用於表現數量的資料。 DCP-7-1-1-5 理解長條間應有適當的距離作為間隔；直方圖中的長條之間沒有間隔，資料應依序排列且長條圖或直方圖之長條應同寬。 DCP-7-1-1-6 理解長條圖各長條、折線圖各點及圓形圖各區塊所代表之意義。

學習重點 (內容、概念、能力)	<p>DCP-7-1-1-8 理解列聯表，並解決日常生活中問題。</p> <p>DCP-7-2-1-1 理解平均數的名稱與意義。</p> <p>DCP-7-2-1-2 從資料中計算平均數並解決簡單平均數問題。</p> <p>DCP-7-2-2-1 理解中位數的名稱與意義。</p> <p>DCP-7-2-2-2 從資料中計算中位數，並理解中位數的左邊資料個數與右邊資料個數相同。</p> <p>DCP-7-2-3-1 理解眾數的名稱與意義。</p> <p>DCP-7-2-3-2 從資料中找到眾數。</p> <p>DCP-7-2-3-3 理解平均數易受極端值影響，而中位數及眾數則不受影響。</p>
適用對象	<p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容</p> <p>D-6-1 圓形圖</p> <p>報讀、說明與製作生活中的圓形圖。包含以百分率分配之圓形圖（製作時應提供學生已分成百格的圓形圖）。</p>
教學連結建議	<p>銜接概念：統計資料處理</p> <p>D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。</p>
學習目標	<ol style="list-style-type: none"> 1. 能知道各種統計圖表的特點，並能依據需求選擇適切的統計圖表呈現資料。 2. 能使用平均數來做為整組數據的代表。 3. 能知道什麼時候可以使用中位數與眾數來呈現資料的特徵。
教學策略	<div data-bbox="491 1442 1350 1637"> <pre> graph LR A((活動 • 遊戲情境 • 蒐集資料)) --> B((提問 我問你答)) B --> C((模仿 跟著老師動一動)) </pre> </div> <ol style="list-style-type: none"> 1. 以「遊戲情境」配合「活動融入教學」的方式進行課程。 2. 以「提問教學法」配合「比較活動與圖像表徵」引入統計數據的概念。 3. 以「模仿教學法」引導學生進行統計圖表與統計數據學習。2. 透過實務操作及討論探究，引導學生從數字表徵，學習到以文字符號表徵。
教學材料	<ol style="list-style-type: none"> 1. 數字加減卡一副。 2. 學習單（附件一）。

教學資源	<ol style="list-style-type: none"> 1. 均一教育平臺：5-1 統計圖表 列聯表。  2. 數學生根新世界教材。  3. ShareClass 李記萱老師 3-1 資料整理與統計圖表、3-2 資料的分析。  4. 侯惠澤 (2016) 。遊戲式學習：啟動自學 X 喜樂協作，一起玩中學！。親子天下。 5. Ben Orlin(2020) 。塗鴉學數學（王年愷譯）。臉譜出版。（原著出版於 2018 年）。 6. 各版本教科書。
------	---

主題一【閱讀生活中的圖表】

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>一、準備活動：資料大搜查活動說明</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 教師說明活動內容，請同學回家蒐集家中成員的身高、體重、星座、血型、家庭人口數、每日的作息時間分配等資料，並選取兩個議題來討論。 2. 在國小中年級時學過長條圖；國小高年級時學過折線圖與圓形圖，我們嘗試用簡單的題目讓各位同學回顧國小學過的內容，請同學練習並討論學習單，請參見學習單主題一【一、資料大搜查】。 <p>二、發展活動一：看得懂長條圖</p> <p>體育課張老師對她任教的兩個班級進行投籃的測驗，學習單 P2 是 40 位同學每人罰球線投 10 顆球後的統計長條圖，教師提問：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 請說明橫軸所代表的意思是什麼？ 	<p>請同學找 3~5 位同一年級的朋友，記錄每一個人的身高、體重、星座、血型等資料，不一定要同班級的同學。</p>

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>2. 請說明縱軸所代表的意思是什麼？</p> <p>3. 投進球數為 0 球、1 球或 2 球的共有幾個人？</p> <p>4. 投進球數大於或等於 4 球的共有幾個人，占全體人數的幾分之幾？</p> <p>5. 如果我們把長條形重排來呈現圖形會影響我們觀看投進球數人數的多寡嗎？</p> <p>三、發展活動二：算得出圓形圖</p> <p>學習單 P2 的圓形圖是承安一天中作息時間分配的圓形圖，你有發覺上面的內容有一點不一樣嗎？</p> <p>1. 圓形圖內的數字所代表是什麼意思？</p> <p>2. 他每天的睡覺時間占一天作息時間的百分比為多少？</p> <p>3. 閱讀這項上面的數值該是多少？在閱讀上花了多少個小時？</p> <p>四、發展活動三：說得清折線圖</p> <p>1. 學習單 P3 為 2017 年阿里山每個月的平均氣溫折線圖，教師提問：</p> <p>(1) 月均溫低於 10 度的是哪幾個月分？</p> <p>(2) 哪兩個月分之間的月均溫是上升的？</p> <p>(3) 哪兩個月分之間的月均溫是下降的？</p> <p>2. 學習單 P3 為 2016 年臺灣結婚人數統計折線圖，教師提問：</p> <p>(1) 男性和女性各自在哪一組年齡的結婚人數最高？</p> <p>(2) 在幾歲以前，女性的結婚人數比男性還高？</p> <p>(3) 在哪一組年齡區間中，男性和女性結婚人口數差距最大？</p> <p>(4) 若想要在結婚人數統計折線圖上方，畫上男性跟女性的直方圖，請問容易嗎？為什麼？</p> <p>五、回顧與總結</p> <p>1. 長條圖：可以隨意調換橫軸順序且不影響觀看的圖形。</p> <p>2. 圓形圖：可以看到部分和全部比例關係的圖形</p> <p>3. 折線圖：可以觀察到變化或趨勢的圖形</p>	<p>學生若無法確切回答，可以透過移動長條圖來說明。</p> <p>如果學生對於分數的計算有困難時，老師也可以用小數來處理。</p>

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>六、補充說明：教學流程可以採用四學模式，三個活動可以進行三次循環。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 自學：請同學先獨立完成學習單第 2~3 頁。 2. 組內共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。 3. 組間互學：老師抽組別籤發表或舉手搶答。 4. 教師導學：總結整理 <p>(第一節課結束)</p>	<p>教學時採分組合作學習模式，鼓勵學生彼此學習、討論，以達到互教、互學，更深層學習的目的。</p> <p>班上進行異質分組，每組 3~4 人，分組時應注意落單的同學，給予其分組的協助。</p> <p>利用提問指定組別回答與搶答方式進行。老師提問，指定組別回答，該組推派一位同學回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組獲得卡片一張，答錯則換別組；另外也採用搶答模式，最快舉手的人回答，答對則該組獲得卡牌一張，藉此了解孩子們學習的效果。</p>

主題二【為什麼需要統計圖表？】

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>一、準備活動</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 依學生程度採異組分組，由孩子自己尋找組員，老師從旁協助。 2. 說明分組競賽規則：老師提問，指定組別回答，該組推派一位同學回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組獲得卡片一張，答錯則開放搶答；另外也採用搶答模式，老師提問，最快舉手的人回答，答對則該組獲得卡牌一張，藉此了解孩子們學習的效果。 <p>二、發展活動</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 自學：請同學先獨立完成學習單第 4 頁第一大題與第二大題內容。【為什麼我們需要統計圖表？】 2. 組內共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。 3. 組間互學：老師提問抽組別發表。 <ol style="list-style-type: none"> (1) 老師想要知道班上同學的表現，有多少人是考得很好的，成績是 90 分以上有幾位同學？ 	<p>若學生在自學時，無法順利完成學習單，老師可以針對班級特性，進行全班老師講述學生書寫的模式。</p> <p>教師課間巡視，觀察各小組討論內容是否失焦，並適時給予意見指導。</p>

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>(2) 老師想要幫忙需要加強的同學，有多少位同學成績是不及格？</p> <p>(3) 如果小張老師將班上成績區分成三組，0~59分、60~79分、80~100分，判斷一下，這三組，哪一組人數最多？請圈起來。</p> <p>(4) 先找學生的成績最高是幾分？最低是幾分？</p> <p>(5) 最大和最小間的距離稱為全距 = 最高分 - 最低分，七年一班數學小考成績分數全距多少分？</p> <p>(6) 如果想要 5 分當一組時，我們需要分成幾組。</p> <p>(7) 若想要 10 分當一組時，我們需要分成幾組。</p> <p>4. 第二大題第 4 題若我們採取 10 分為一組，請完成下方的表格，採用舉手搶答的方式進行。</p> <p>5. 教師提問：上面第一大題的三個小問題中，如果使用上面的表格來回答，你是否覺得找起資料來較為容易呢？</p> <p>6. 老師可以運用應用程式 Excel 將數學小考成績繪製長條圖與直方圖，讓學生判斷長條圖與直方圖的差異，並說出哪一個圖表的畫法比較正確。</p> <p>7. 自學：請同學先獨立完成學習單第 5 頁第三大題與重點整理。</p> <p>8. 組內共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。</p> <p>9. 組間互學：老師提問抽組別發表。</p> <p>(1) 如果想要呈現大小關係，你會選擇繪製成什麼圖？</p> <p>(2) 如果想要呈現各家超商在台灣佔有率（比例關係），你會選擇繪製成什麼圖？</p> <p>10. 教師導學：總結整理</p> <p>我們可以透過統計圖表來呈現資訊，按照需求的不同，而有不同的選擇。</p> <p>(1) 想要比較大小或差異會採用長條圖</p> <p>(2) 想觀察變化或看趨勢會採用折線圖</p> <p>(3) 想知道部分和整體的比例關係會選擇圓形圖</p>	<p>依據基本學習內容，國小三年級已引入一維及二維表格，四年級已能報讀折線圖及長條圖，並繪製長條圖，五年級能繪製折線圖，六年級能報讀及繪製圓形圖。國中階段教學以報讀直方圖為主，不宜要求學生製作各種圖表。</p> <p>直方圖的教學以有序且連續性的數值型資料為主。</p> <p>教學上應協助學生能分辨長條圖與直方圖的差別。</p>

教學活動流程設計	教師注意事項
(4) 想要比較多組資料的變化會選擇折線圖 (第二節課結束)	

主題三【好用的圖表】

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>一、準備活動</p> <p>教師公播均一教育平臺影片： 5-1 統計圖表 列聯表 (影片網址：https://www.junyiacademy.org/course-compare/math-juni/math-7/n-m7a/n-m7b-v108ch5/n-m7b-v108ch5-1/v/ZolZ4aELU8)</p>  <p>二、發展活動</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 自學：請同學先獨立完成學習單第 6 頁【好用的圖表】。 2. 組內共學：教師發下平板，各組一台平板，可以再觀看影片，請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，並形成共識。 3. 組間互學：老師提問抽組別發表。 <ol style="list-style-type: none"> (1) 依上述資料製作列聯表，列聯表是用什麼做出來的表格，可以快速看出彼此關係。 (2) 均一國中願意接種疫苗的人數是多少人，其百分比為多少 % ？ (3) 請問七年級不願意接種疫苗的人占七年級所有人的多少百分比呢？ 4. 組間互學：採用舉手搶答的方式進行 <ol style="list-style-type: none"> (1) 請問飲料點冰塊正常的有多少人呢？ (2) 請問喝蘋果汁去冰的人占有人的多少百分比呢？ 5. 教師導學：我們用兩種類別 (年級、意願) 的統計數據之表格，稱為列聯表。列聯表可以呈現出兩個屬性變數的不同類別，置於行與列的地方，在表格中填入變數組合的發生數值。 	<p>在學生自學期間，教師巡視各個學生作答狀況，並適時給予個別指導。</p> <p>教師課間巡視，觀察各小組討論內容是否失焦，並適時給予意見指導。</p> <p>利用提問指定組別回答與搶答方式進行。老師提問，指定組別回答，該組推派一位同學回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組獲得卡片一張，答錯則換別組；另外也採用搶答模式，最快舉手的人回答，答對則該組獲得卡牌一張，藉此了解孩子們學習的效果，在問答的過程中，教師適時補充。</p>

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>6. 自學：請同學先獨立完成學習單第 7 頁第 3、4 題與練習題。</p> <p>7. 組內共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。</p> <p>8. 組間互學：老師提問抽組別發表。</p> <p>(1) 草莓班女生占樂樂幼稚園的百分比為何？</p> <p>(2) 女生穿著 S 號占全校的百分比為何？</p> <p>(3) 甲班數學及格人數占兩班人數的百分比為何？</p> <p>9. 教師導學：總結整理</p> <p>列聯表是一種二維數據表格，適合用於表現離散的類別型資料，其『欄』與『列』是同一母群體的兩種分割，並在每一欄的最下方、每一列的最右方、做『合計』，表格的右下角做『總計』。</p> <p>(第三節課結束)</p> <p>一、準備活動</p> <p>教師公播網路影片：<Altis & Focus 喜歡哪一台？>(影片網址：https://www.youtube.com/watch?v=bJPapByEGoE)</p> <p>(從 12 分 45 秒開始撥放)</p> <p>二、發展活動</p> <p>1. 自學：請同學先獨立完成學習單第 8 頁比例轉換一圓形圖。</p> <p>2. 組內共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。</p> <p>3. 組間互學：採用舉手搶答的方式進行，教師提問</p> <p>(1) 得票數是 24 票，比例為多少？圓形圖需要多少角度？</p> <p>(2) 得票數是 26 票，比例為多少？圓形圖需要多少角度？</p> <p>(3) 紅豆的比例是多少？</p> <p>(4) 奶油的比例是多少？</p>	<p>若學生在自學時，無法順利完成學習單，老師可以針對班級特性，進行全班老師講述學生書寫的模式。</p> <p>教師課間巡視，觀察各小組討論內容是否失焦，並適時給予意見指導。</p>

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>(5) 芋頭的比例是多少？</p> <p>(6) 奶油黑糖麻糬的比例是多少？</p> <p>(7) 抹茶白玉麻糬的比例是多少？</p> <p>(8) 弗朗基每月的收入為 40000 元，預算分配如附圖所示，儲蓄占全部收入的多少百分比？</p> <p>(9) 2012 年涵郁家的總支出金額是多少錢。</p> <p>(10) 2013 年涵郁家的娛樂費用支出是多少錢</p> <p>4. 教師導學：總結整理</p> <p>畫圓形圖時，上面的刻度如時鐘一般共 60 格，每一小格 6 度。</p> <p>同學一天的作息時間分配，通常會繪製成圓形圖，方便看出各種活動的比例。</p> <p>三、延伸活動：回家作業，請學生完成學習單第 9 頁到第 11 頁常見試題演練。</p> <p>(第四節課結束)</p>	<p>關於在畫圓形圖時，最重要的是圓心角，此教學模式是運用比的直式格式來幫忙學生了解項目間有著倍數關係，運用放大縮小的方式來解決比例的轉換。</p>

主題四【比較活動 - 平均數】

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>一、準備活動：複習</p> <p>複習上節課回家作業，採用問答方式，檢討作業</p> <p>二、發展活動</p> <p>(一) 比比看</p> <p>1. 在這一小節中，我們試著運用一些統計量去描述這些資料，藉此來做分析比較。生活當中平均利用「平均」的概念，譬如某次段考小雯各科的成績為國文 88 分、英文 92 分、數學 85 分、自然 95 分、社會 98 分，我們可以計算出此次段考的平均是 $(88 + 92 + 85 + 95 + 98) \div 5 = 458 \div 5 = 91.6$ (分)。</p> <p>2. 教師提問</p> <p>老師買糖果給全班同學吃，全班共有 20 個人，平均每個人拿到 5 顆糖果，請問老師帶了多少顆糖果呢？</p>	<p>利用提問指定組別回答與搶答方式進行。老師提問，指定組別回答，該組推派一位同學回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組獲得卡片一張，答錯則換別組；另外也採用搶答模式，最快舉手的人回答，答對則該組獲得卡牌一張，藉此了解孩子們學習的效果，在問答的過程中，教師適時補充。</p>

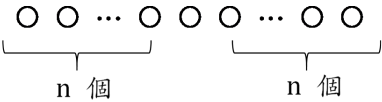
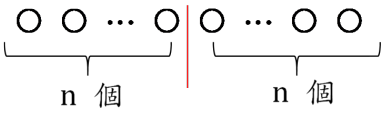
教學活動流程設計	教師注意事項
<p>3. 教師說明</p> <p>事實上，有的同學很喜歡吃糖果，有的同學不喜歡吃糖果，結果下課後，大家互相分享，結果，有的人吃了 12 顆，有的人連一顆都沒吃呢！不知情的老師會以為同學每個人都吃了 5 顆喔！</p> <p>4. 教師提問</p> <p>第二次段考結束了，同班的<u>阿達</u>與<u>小吉</u>在比較他們成績的高低，他們的成績如表格，請問誰考得比較好？為什麼？</p> <p>5. 教師提問</p> <p>莊老師任教的 903 班有 20 位學生，張老師任教的 904 班有學生 25 位學生，已知 903 班的總分是 1260 分，904 班平均 60 分，想比兩班數學段考成績的表現，你會選擇總分還是平均來作比較呢？</p> <p>6. 教師提問</p> <p>想把兩杯水倒成一樣多，你會怎麼做呢？請在圖上畫出此時水的高度。</p> <p>7. 教師總結</p> <p>透過截長補短將資料中的數字全部調成什麼？這個相同的數字就是平均數。$\text{平均數} \times \text{資料個數} = \underline{\hspace{2cm}}$。因此，資料中的每筆數據都會影響平均數的大小，因此，我們若想用一個數值來概述一整個群體，有時候我們會選擇平均數。</p> <p>(二)分配不均</p> <p>1. 有一天<u>小華</u>去一家公司面試，<u>小華</u>與面試官的對話如學習單 P13，根據對話的情境，請說出一個你覺得<u>小華</u>可能的薪水是多少元？</p> <p>2. 結果實際上公司的薪水分布如圖所示，你覺得<u>小華</u>會有什麼感覺？</p> <p>3. 請在上圖中圈出一個特別大的數字。</p> <p>4. 這個情況中，你同意平均數呈現了全體資料的特性嗎？</p> <p>5. 教師總結</p> <p>如果我們的資料有特別大或是特別小的數值，平均數可能就不大適合拿來當作這群資料的指標。</p>	<p>教師可以提示學生以多補少，最後變成一樣高！</p>

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>(三)未分組小數目</p> <p>在母親節前夕，老師為了讓學生知道母親的辛勞，讓學生紀錄媽媽的整日睡眠時數表，<u>小莉</u>紀錄媽媽的睡眠時間如表格，請幫忙計算出媽媽的平均睡眠。</p> <p>(四)未分組大數目</p> <p>在高爾夫球運動中，通常在某球場打一天的賽程共打 18 洞，而大概的標準桿為 72 桿，<u>小夫</u>的爸爸統計在春季到高爾夫球場 10 次的成績如表格，在計算春季時的平均桿數時，你有想到比較好的方法嗎？</p> <ol style="list-style-type: none"> 『方法一』盡量拼湊成尾數為 0 『方法二』我們可以在上面的 10 次桿數當中進行預估，若我們預估小夫爸的平均桿數為 82 桿，計算每次與平均 82 桿比較的總和，算出平均差異，最後再加上 82 桿。 強化練習：帶領學生完成學習單 P14 未分組大數目第 2 題。 <p>(五)已分組資料求平均</p> <ol style="list-style-type: none"> 教師提問 <p><u>自強國中</u>三年丙班 25 位同學家庭人口數的次數分配表如附表，試求這 25 位同學家庭人口數的平均數。</p> <ol style="list-style-type: none"> 教師提問 <p>在高爾夫球運動中，通常在某球場打一天的賽程共打 18 洞，而大概的標準桿為 72 桿，<u>小夫</u>的爸爸統計在上半年到高爾夫球場 20 次的成績如表格，請問上半年的平均桿數是多少？</p> <p>(六)已分組資料並用中間值求平均</p> <ol style="list-style-type: none"> 教師提問 <p><u>太寶</u>記錄他六月分每天的花費，且製成次數分配表，如學習單 P15，請問太寶六月分花費金額的算術平均數為多少元？</p> <ol style="list-style-type: none"> 教師提問 <p>學習單 P16 為某班學生每天從學校往返家中所花時間次數分配折線圖，請問該班往返的平均時間為多少分？</p>	<p>教師提示：可以運用與 100 的差距來協助計算</p> <p>數字可以用之前學過的預估值想法，找一個數字為基準，先將此數字當成平均值，在計算與平均預估值的總差異</p> <p>教師提示：每個區間若取最高則高估；反之則會低估，利用中間值做估算最為合適。</p>

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>三、延伸活動：回家作業，請學生完成學習單第 16 頁回家練習</p> <p>(第四、五節課結束)</p>	

主題五【圖像表徵 - 中位數】

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>一、準備活動：複習</p> <p>複習上節課回家作業，採用問答方式，檢討作業</p> <p>二、發展活動</p> <p>(一)教師說明：奧運男子雙人跳水的體育賽事，學習單 P17 的成績欄當中，下方是 11 人裁判制所給的分數，左下方為兩組動作裁判 (每組三人) 所給的分數，中下方為 5 人動作同步裁判所給的分數，某些分數被畫掉了。</p> <p>1. 教師提問</p> <p>下方共三組當中，每組被劃掉的兩個分數都是該組的什麼分數？</p> <p>2. 教師提問</p> <p>為什麼需要劃掉這兩個分數呢？</p> <p>3. 教師總結</p> <p>在資料統計當中，有些時候會因為有極端值的出現，而讓整筆資料的平均發生偏誤，但又不可以將所出現的極端資訊做刪除，所以利用整筆資料當中數值最中間的數代表該組資訊稱為中位數。所以中位數是最佳的集中趨勢的代表數。</p> <p>(二)中位數找尋方法</p> <p>1. 教師說明</p> <p>(1) 將數值由小寫到大。</p> <p>(2) 利用頭尾刪除法找到中間。</p> <p>(3) 當資料太多，可利用歸納的方式找到中位數。</p>	<p>利用提問指定組別回答與搶答方式進行。老師提問，指定組別回答，該組推派一位同學回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組獲得卡片一張，答錯則換別組；另外也採用搶答模式，最快舉手的人回答，答對則該組獲得卡牌一張，藉此了解孩子們學習的效果，在問答的過程中，教師適時補充。</p> <p>引導學生說出想法</p>

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>2. 概念說明</p> <p>(1) 請全班學生起立並說出自己的身高，老師想要由左低至右高的排列順序排隊，老師說向中看齊時，身高排序第幾位學生該舉手，其身高為何呢？</p> <p>(2) 如果全班有九個人時，第幾位會是中位數呢？前半部會有多少人？後半部會有多少人？</p> <p>(3) 如果全班有十個人時，第幾位會是中位數呢？前半部會有多少人？後半部會有多少人？</p> <p>(4) 當人數是偶數而我們想要找出正中間那位同學時，發生什麼事了？這時如何找中間呢？</p> <p>(5) 再用全班的體重操作一次，加強學生的概念。</p> <p>(三) 帶領學生一起完成學習單第 17、18 頁</p> <p>(四) 教師總結</p> <p>「中位數」的值是用來平均分割資料數的數字，那麼，決定這個數字會有以下兩種可能：</p> <p>1. 如果資料總數是奇數個 ($2n+1$)，剛好有一個中間的值，中位數就會是排序會在第幾個的數字。</p>  <p>2. 如果資料總數是偶數個 ($2n$)，資料數剛好平分，我們會取第幾個和第幾個數字的 ____ 來代表中位數。</p>  <p>(五) 強化概念</p> <p>1. 【說例】某科技公司人事部門整理了研發部門所有工作人員年齡如下：28、32、47、33、31、40、49、42、25、40、40、25 (單位：歲)，請問該部門工作人員年齡的中位數是多少？</p> <p>2. 【例題】一對義工夫婦帶一群青少年參加育樂營，他們的年齡分別為 55、60、16、10、14、13、13、15、12、14、13、13、12、14、15 歲，請問這群人年齡的中位數是多少？</p>	<p>請由低到高排好之後，左右各刪一人的方式推出正中央</p> <p>可以利用小的刪一個、大的刪一個的方式做驗算。</p> <p>利用圖像表徵或具體操作的方式來加強學生的概念。</p>

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>三、延伸活動：回家作業，請學生完成學習單第 19 頁</p> <p>(第六節課結束)</p>	

主題六【情境問題 - 眾數】

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>一、準備活動：複習</p> <p>複習上節課回家作業，採用問答方式，檢討作業</p> <p>二、發展活動</p> <p>1. 教師提問</p> <p>運動會快到了，班上為了強化班級向心力，決定訂製班服，現在要決定顏色，你喜歡哪個顏色呢？有五種顏色可以選擇，黑、白、紅、黃、藍。</p> <p>2. 教師用調查統計結果的方式，引入眾數的概念，因為學習扶助班學生數比較少，所以每一位學生可以有兩票，老師可以統計一下，班上最多人選的顏色是哪一個？</p> <p>3. 在國中的班會課當中，老師會依據班級需求、老師專長或學校任務，利用班會課時間讓學生有事做。某日強納生老師在班會課時給了班上三種選擇（打球、看影片、上數學），讓全班學生投票選出一項最多的讓全班一起從事，整個班級的投票結果如學習單 P20，請問學生最想做什麼？</p> <p>4. 教師結論</p> <p>眾數代表的是在資料中集中的特性（出現最多筆的資料），該項目就是眾數。</p> <p>5. 以分組資料找眾數</p> <p>(1) 從忠孝國中新生入學甲班訂購體育服裝的尺寸數量列聯表中，可以發現甲班訂購尺寸的眾數為多少？</p> <p>(2) 從忠孝國中新生入學乙班訂購體育服裝的尺寸數量列聯表中，可以發現乙班訂購尺寸的眾數為多少？</p>	<p>利用提問指定組別回答與搶答方式進行。老師提問，指定組別回答，該組推派一位同學回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組獲得卡片一張，答錯則換別組；另外也採用搶答模式，最快舉手的人回答，答對則該組獲得卡牌一張，藉此了解孩子們學習的效果，在問答的過程中，教師適時補充。</p>

教學活動流程設計	Teaching Memo
<p>6. 教師結論</p> <p>在資料當中若有兩個或多個項目的數量皆為最多，則這些項目皆是眾數。</p> <p>三、延伸活動</p> <p>1. 自學：請同學先獨立完成學習單第 21 頁【類題】。</p> <p>2. 組內共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。</p> <p>3. 組間互學：老師提問抽組別發表。</p> <p>(1) 教師提問：學習單 P21，從每箱所含不良品的瓶數統計表中，可以算出每箱所含不良品個數的眾數為多少？</p> <p>(2) 從 A 班的體重次數分配折線圖中，可以按出該班體重的眾數在哪一組？</p> <p>4. 教師導學：總結整理</p>	<p>若學生在自學時，無法順利完成學習單，老師可以針對班級特性，進行全班老師講述學生書寫的模式。</p> <p>教師課間巡視，觀察各小組討論內容是否失焦，並適時給予意見指導。</p>

主題七【數感同心圓】

教學活動流程設計	教師注意事項
<p>1. 時間限制：請各組將收集的卡牌進行活動，每小組至少 10 張牌。10 分鐘內將牌卡連成一個圓形，組內可討論，不用所有卡牌都進行皮成一個同心圓。</p> <p>2. 規則說明：設定起始點卡順時針連接，起始牌卡中間數字與右上角數字運算的結果應為下張牌卡的數字（超過 10 取個位數字，負數取絕對值，運算結果為 0 時後方可接 0）。且最後一張牌卡的運算結果須為起始牌卡。舉例說明，運算後的結果如果是 11，則下一張卡牌可以接數字卡 1；結果是 12，下一張卡牌可以接數字卡 2；結果是 -1，下一張卡牌可以接數字卡 1；結果是 -2，下一張卡牌可以接數字卡 2；結果是 0，下一張卡牌可以接數字卡 0。</p>	

教學活動流程設計	Teaching Memo
<p>3. 換牌機制：排成同心圓的牌卡數量不限，不用將所有的卡排放入到同心圓中，但各隊間可以彼此互惠交換等量的牌數，10 分鐘後各隊須能馬上說出自己的總分，否則零分。</p> <p>4. 分數計算：無法達到同心圓者零分，達到同心圓者將同心圓中間數字加總起來，算出總和。</p> <p>5. 點數計算：同心圓分數總合加上卡牌所有數量即為總點數，點數最高者獲勝。</p>	
附件	<ul style="list-style-type: none"> · 附件 1：學習單。 · 附件 2：前測。 · 附件 3：後測。



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

評量 工具



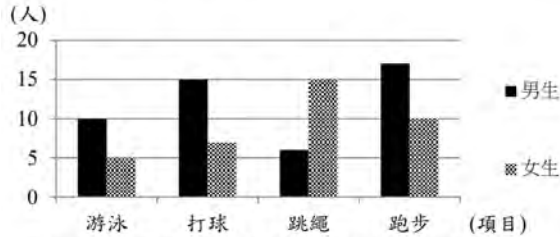
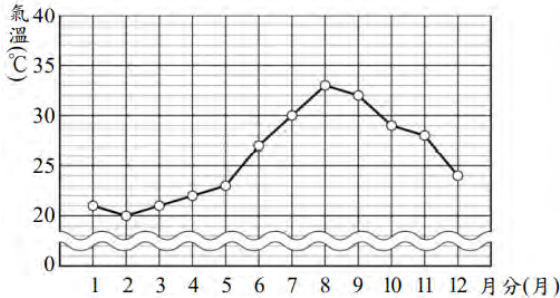
一、口頭提問

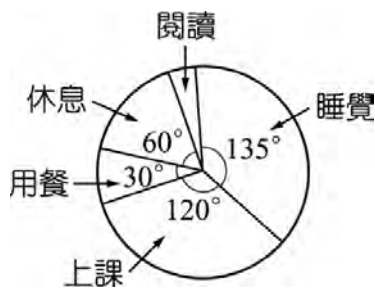
提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 I-1-2-1	你們覺得生活周遭有哪一些的數值是有趣的？	學習單一
主題 I-1-2-2	哪些有趣的數值，你可以從誰那裏問出來呢？	
主題 I-1-4-3	請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣呢？	
主題 I-1-8-4	甚麼是幾分之幾，甚麼是百分比呢？	
主題 II-2-2-1	該如何進行分組，分成幾組會比較恰當呢？	學習單二
主題 II-2-3-2	還記得正字劃記該如何畫呢？	
主題 II-2-5-3	同學你有發現長條圖跟直方圖的差異嗎？試著說說看。	
主題 II-2-9-3	同學可以請你們說說看想想看各種類圖需求為何？	
主題 III-3-3-1	百分比對於大家有甚麼感覺呢？可以試著說說看嗎？	學習單三
主題 III-3-6-2	百分之多少代表過半數？為什麼要跟全體做比較呢？	
主題 III-4-11-3	從數量到百分比如何轉換？	
主題 III-4-11-4	一個圓的轉角叫周角，一周角是幾度呢？	
主題 III-4-11-5	數量、百分比、圓周角間如何做轉換呢？	
主題 III-4-14-6	這幾個題目當中，你看到了各種形色的統計圖表，能說說看它們長什麼樣子，用在哪裡最恰當呢？	
主題 IV-5-1-1	平均數常常用在哪邊？你算過平均成績嗎？國小考 5 科怎麼算總平均呢？	學習單四
主題 IV-5-5-2	怎麼看分配不均呢？能夠用平常的語言訴說嗎？	
主題 IV-5-9-3	未分組資料怎麼算比較快呢？答案是多少？可以告訴大家想法嗎？	
主題 IV-5-13-4	已分組資料該用那個數代表該組的數值呢？	
主題 V-6-4-1	排序的方式有哪些？為什麼先排序在找中間呢？	學習單五
主題 V-6-4-2	找到正中間的方法步驟為何？大家想想看。	
主題 V-6-4-3	總數為奇數、偶數有差別嗎？找的中位數真的存在嗎？	

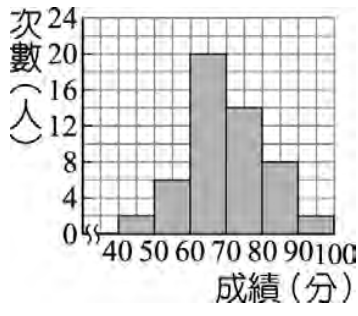

提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 V-6-9-4	大家能夠整理、歸納中位數的求法嗎？說說看吧	
主題 VI-7-5-1	眾數是什麼呢？有人可以說說看嗎？	學習單六

二、前測、後測

1. 前測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	<p>1. 下圖是四年級男、女學生最喜歡運動項目的長條圖，下列哪個敘述正確？</p>  <p>四年級男女學生最喜歡運動項目長條圖</p> <p>(A) 四年級男生總共有 37 人 (B) 最喜歡跑步的學生最多 (C) 最喜歡游泳的男生人數是 5 人 (D) 長條圖中的縱軸表示四年級男女生最喜歡的項目</p> <p>(108 年 4 年級篩選測驗 6)</p>	進行教學前
	DCP-7-1-1-2 能報讀直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖。	
第 2 大題	<p>2. 下圖是某地去年平均氣溫的折線圖，看圖回答問題，下面哪個敘述是錯誤的？</p>  <p>某地去年平均氣溫的折線圖</p>	
	DCP-4-1-2-1 能報讀生活中常用的折線圖。	

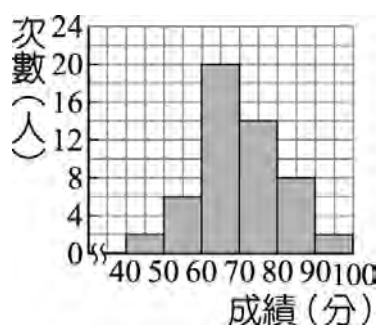
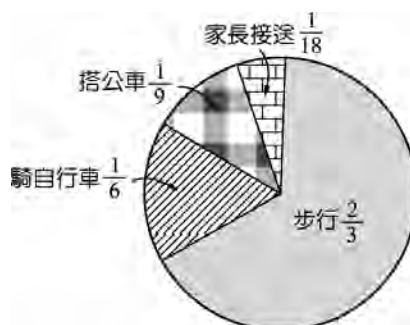
試題	測驗題目	建議評量時間																				
	測驗核心概念																					
第 2 大題	(A) 平均氣溫比 30 度高的有 7 月、8 月和 9 月 (B) 平均氣溫最高溫和最低溫相差 13 度 (C) 平均氣溫最高溫是 8 月 (D) 平均氣溫最低溫是 2 月 (108 年 4 年級篩選測驗 14)	進行教學前																				
	DCP-7-1-1-2 能報讀直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖。																					
第 3 大題	3. 已知潛能國中桌遊社團「三個年級的人數」及「男女生的人數」分配表如下表，請問七年級男生人數占桌遊社團的百分比為何？ <table border="1"><tr><td>年級</td><td>七</td><td>八</td><td>九</td><td>合計</td></tr><tr><td>男生人數</td><td>10</td><td>24</td><td>9</td><td>a</td></tr><tr><td>女生人數</td><td>15</td><td>16</td><td>6</td><td>b</td></tr><tr><td>合計</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr></table> (109 年成長測驗施測後回饋 8)		年級	七	八	九	合計	男生人數	10	24	9	a	女生人數	15	16	6	b	合計	c	d	e	f
	年級		七	八	九	合計																
男生人數	10		24	9	a																	
女生人數	15	16	6	b																		
合計	c	d	e	f																		
DCP-7-1-1-8 理解列聯表，並解決日常生活中問題。																						
第 4 大題	4. 巧巧牧場共養了 200 隻動物，下表是各種動物數量所佔的百分率。請問牧場有幾隻羊？ <table border="1"><tr><td>種類</td><td>馬</td><td>羊</td><td>牛</td><td>豬</td></tr><tr><td>百分率 (%)</td><td>25</td><td>48</td><td>12</td><td>15</td></tr></table> (109 年 6 年級成長測驗施測後回饋 25)	種類	馬	羊	牛	豬	百分率 (%)	25	48	12	15											
	種類	馬	羊	牛	豬																	
百分率 (%)	25	48	12	15																		
NCP-5-10-1-2 能認識百分率極其在生活中的應用。																						
第 5 大題	5. 如圖為阿貴一天中的作息時間分配圓面積圖，若阿貴希望把自己每天的閱讀時間調整為 2 小時，那麼阿貴的閱讀時間需增加多少分鐘？ 〔91. 基測 II〕  (A)15 (B)48 (C)60 (D)105。																					
	DCP-7-1-1-3 理解長條圖、圓形圖適合用於表現類別的資料。																					

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 6 大題	<p>6. 附圖為籃球社成員在數學抽考成績的次數分配直方圖，則下列敘述何者錯誤？</p> <p>(A) 60 ~ 70 分這一組有 20 人 (B) 不及格的有 8 人 (C) 80 分以上有 9 人 (D) 組距為 10 分。</p>  <p>DCP-7-1-1-7 理解直方圖各長條所代表之意義。</p>	進行教學前
	<p>7. 小琳班上 25 位同學射飛鏢命中紅心的次數依序為 3、5、5、5、2、4、6、7、3、9、0、9、3、3、4、5、1、2、3、8、1、4、6、0、3。此資料的眾數為何？〔98. 基測 II〕</p> <p>(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 9。</p> <p>DCP-7-2-3-2 從資料中找到眾數。</p>	
第 8 大題	<p>8. 小華班上比賽投籃，每人投 6 球，附圖是班上所有學生投進球數的圓形圖。根據附圖，下列關於班上所有學生投進球數的統計量，何者正確？〔102. 基測〕</p> <p>(A) 眾數為 5 (B) 眾數為 2 (C) 中位數為 3 (D) 中位數為 2.5。</p>  <p>DCP-7-2-2-2 從資料中計算中位數，並理解中位數的左邊資料個數與右邊資料個數相同。</p> <p>DCP-7-2-3-2 從資料中找到眾數。</p>	
第 9 大題	<p>9. 某班老師算出全班 40 位學生的數學成績後，決定每人加 8 分，加分後沒有人超過滿分。若全班成績加分前的總分為 A，平均為 a 分；加分後的總分為 B 分，平均為 b 分，則下列關係何者錯誤？〔96. 基測 II〕</p> <p>(A) $A=40a$ (B) $B=40b$ (C) $b=a+8$ (D) $B=A+8$。</p> <p>DCP-7-2-1-2 從資料中計算平均數並解決簡單平均數問題。</p>	

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 10 大題	<p>10. 某高中的籃球隊成員中，一、二年級的成員共有 8 人，三年級的成員有 3 人。一、二年級的成員身高（單位：公分）如下：172、172、174、174、176、176、178、178。若隊中所有成員的平均身高為 178 公分，則隊中三年級成員的平均身高為幾公分？〔106. 會考〕</p> <p>(A)178 (B)181 (C)183 (D)186</p>	進行教學前
	DCP-7-2-1-2 從資料中計算平均數並解決簡單平均數問題。	

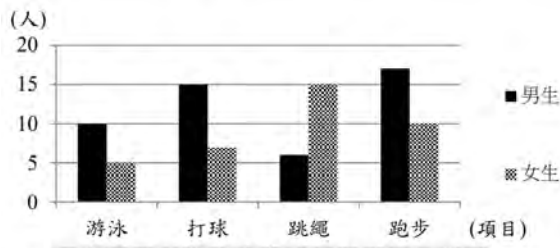
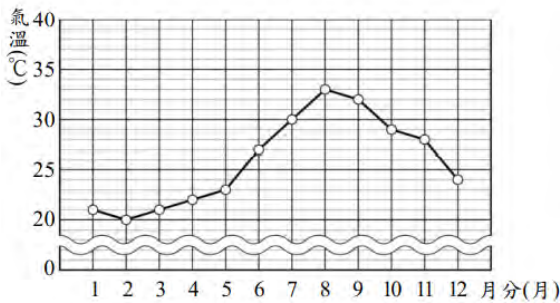
2. 後測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	<p>1. 強國中針對 900 個學生的上學方式進行調查，將其調查結果整理成次數分配圓面積圖，如圖。若半年後再對同一批學生作相同的調查，發現上學方式除了搭公車及家長接送的比例維持不變外，步行的學生人數減少到 350 人。請問第二次調查中騎自行車上學的學生有多少人？〔91. 基測 I〕</p> <p>(A)250 (B)350 (C)400 (D)450。</p>	可於第 4 節 課後實施
	DCP-7-1-1-3 理解長條圖、圓形圖適合用於表現類別的資料。	
第 2 大題	<p>2. 附圖為排球社成員在數學抽考成績的次數分配直方圖，則下列敘述何者錯誤？</p> <p>(A) 組距為 10 分。 (B) 不及格的有 10 人 (C) 80 分以上有 10 人 (D) 60 ~ 70 分這一組有 20 人</p>	可於第 4 節 課後實施
	DCP-7-1-1-7 理解直方圖各長條所代表之意義。	



試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 3 大題	<p>3. 安安班上有九位同學，他們的體重資料如下：57、54、47、42、49、48、45、47、50。(單位：公斤) 關於此資料的中位數與眾數的敘述，下列何者正確？〔100. 基測 II〕</p> <p>(A) 中位數為 49 (B) 中位數為 47 (C) 眾數為 57 (D) 眾數為 47。</p>	可於第 7 節 課後實施
	<p>DCP-7-2-2-2 從資料中計算中位數，並理解中位數的左邊資料個數與右邊資料個數相同。</p> <p>DCP-7-2-3-2 從資料中找到眾數。</p>	
第 4 大題	<p>4. 小華班上比賽投籃，每人投 6 球，附圖是班上所有學生投進球數的圓形圖。根據附圖，請問學生投進球數的中位數是多少球？〔102. 基測〕</p> <p>(A) 中位數為 2 (B) 中位數為 2.5 (C) 中位數為 3 (D) 中位數為 4。</p>	可於第 6 節 課後實施
	<p>DCP-7-2-2-2 從資料中計算中位數，並理解中位數的左邊資料個數與右邊資料個數相同。</p>	
第 5 大題	<p>5. 小明前三次的考試成績分別為 87、83、88 分。若他在第四次考試後，計算四次的平均分數，發現比前三次的平均分數多 1 分，則小明第四次的成績為幾分？〔97. 基測 II〕</p> <p>(A) 87 (B) 88 (C) 89 (D) 90。</p>	可於第 5 節 課後實施
	<p>DCP-7-2-1-2 從資料中計算平均數並解決簡單平均數問題。</p>	
第 6 大題	<p>6. 三年 1 班有男生 a 人、女生 b 人。男生體重的平均數是 56 公斤，女生體重的平均數是 48 公斤。若全班體重的平均數是 54 公斤，則 a 與 b 的數量關係為何？〔93. 基測 I〕</p> <p>(A) $a = 3b$ (B) $3a = b$ (C) $7a = 6b$ (D) $6a = 7b$。</p>	可於第 5 節 課後實施
	<p>DCP-7-2-1-2 從資料中計算平均數並解決簡單平均數問題。</p>	



試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 7 大題	<p>7. 下圖是四年級男、女學生最喜歡運動項目的長條圖，下列哪個敘述正確？(108 年 4 年級篩選測驗 6)</p>  <p>四年級男女學生最喜歡運動項目長條圖</p> <p>(A) 四年級女生總共有 38 人 (B) 最喜歡跑步的男生人數是 10 人 (C) 長條圖中的縱軸表示四年級男女生最喜歡的項目 (D) 最喜歡游泳的學生最少</p>	可於第 4 節 課後實施
	DCP-7-1-1-2 能報讀直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖。	
第 8 大題	<p>8. 下圖是某地去年平均氣溫的折線圖，看圖回答問題，下面哪個敘述是的？(108 年 4 年級篩選測驗 14)</p>  <p>某地去年平均氣溫的折線圖</p> <p>(A) 平均氣溫比 30 度高的有 7 月、8 月和 9 月 (B) 平均氣溫最高溫和最低溫相差 13 度 (C) 平均氣溫最高溫是 8 月 (D) 平均氣溫最低溫是 2 月</p>	可於第 4 節 課後實施
	DCP-7-1-1-2 能報讀直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖。	

試題	測驗題目	建議評量時間																				
	測驗核心概念																					
第 9 大題	<p>9. 已知開發國中魔術社團「三個年級的人數」及「男女生的人數」分配表如下表，請問八年級女生人數占魔術社團的百分比為何？</p> <table><tr><th>年級</th><th>七</th><th>八</th><th>九</th><th>合計</th></tr><tr><td>男生人數</td><td>10</td><td>24</td><td>9</td><td>a</td></tr><tr><td>女生人數</td><td>15</td><td>16</td><td>6</td><td>b</td></tr><tr><td>合計</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr></table> <p>(109 年成長測驗施測後回饋 8)</p>	年級	七	八	九	合計	男生人數	10	24	9	a	女生人數	15	16	6	b	合計	c	d	e	f	可於第 4 節 課後實施
	年級	七	八	九	合計																	
	男生人數	10	24	9	a																	
女生人數	15	16	6	b																		
合計	c	d	e	f																		
DCP-7-1-1-8 理解列聯表，並解決日常生活中問題。																						
第 10 大題	<p>10. 乖乖牧場共養了 200 隻動物，下表是各種動物數量所佔的百分率。請問牧場有幾隻馬？</p> <table><tr><th>種類</th><th>馬</th><th>羊</th><th>牛</th><th>豬</th></tr><tr><td>百分率 (%)</td><td>25</td><td>48</td><td>12</td><td>15</td></tr></table> <p>(109 年 6 年級成長測驗施測後回饋 25)</p>	種類	馬	羊	牛	豬	百分率 (%)	25	48	12	15	可於第 4 節 課後實施										
	種類	馬	羊	牛	豬																	
	百分率 (%)	25	48	12	15																	
NCP-5-10-1-2 能認識百分率極其在生活中的應用。																						

教學反思 應用建議



此次實施教學的對象為二年級學習扶助學生個案，共五位。第一節課先進行前測，為診斷性試題（共 10 題，詳見前測卷），主要目的為了解學生對於學習重點的掌握程度，以便於進行學習扶助教學時，隨學生學習情況調整教學內容。

一、學生表現

（一）前測成績表現

後測成績表現	1.D-C-7-1-1 統計圖表	2.D-C-7-1-1 統計圖表	3.D-C-7-2-2 中位數的意義、D-C-7-2-3 眾數的意義	4.D-C-7-2-2 中位數的意義	5.D-C-7-2-1 平均數的意義	6.D-C-7-2-1 平均數的意義	7.D-C-7-1-1 統計圖表	8.D-C-7-1-1 統計圖表	9.D-C-7-1-1 統計圖表	10.D-C-7-1-1 統計圖表	正確率 (%)
學生 1	O	O	O	O	X	X	X	O	O	O	70
學生 2	X	O	O	X	O	X	O	O	O	O	70
學生 3	X	O	O	O	X	X	X	O	X	O	50
學生 4	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	20
學生 5	O	O	O	X	X	X	O	O	X	O	60
答對人數	3	4	5	2	1	0	2	4	3	4	56%
答錯人數	5	4	3	3	6	4	4	3	4	2	
答對比率 (%)	60	80	100	40	20	0	40	80	60	80	

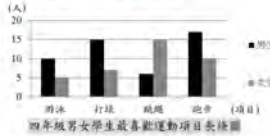
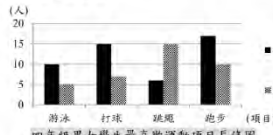
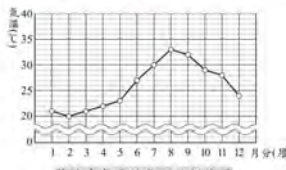
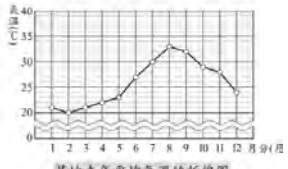
（二）後測成績表現


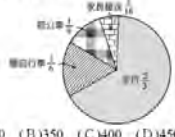
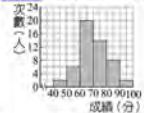
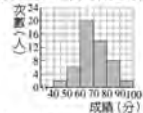


前測成績表現	1.D-C-7-1-1 統計圖表	2.D-C-7-1-1 統計圖表	3.D-C-7-1-1 統計圖表	4.D-C-7-1-1 統計圖表	5.D-C-7-1-1 統計圖表	6.D-C-7-1-1 統計圖表	7.D-C-7-2-3 眾數的意義	8.D-C-7-2-2 中位數的意義、D-C-7-2-3 眾數的意義	9.D-C-7-2-1 平均數的意義	10.D-C-7-2-1 平均數的意義	正確率 (%)
學生 1	O	O	X	O	X	O	O	O	O	X	70
學生 2	O	O	X	O	X	O	O	O	X	X	60
學生 3	O	O	X	X	X	O	O	O	X	X	50
學生 4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	10
學生 5	X	O	X	X	O	O	O	O	X	X	50
答對人數	3	4	0	2	1	4	4	4	1	1	46%
答錯人數	2	1	5	3	5	1	1	1	4	4	
答對比率 (%)	60	80	0	40	20	80	80	80	20	20	

(三) 前、後測結果比較

前後測試題設計之測驗目的以及學生答題情況詳見下表 1。根據前、後測結果，學生經過學習扶助補強性教學後，整體答對率由 46% 提升至 56%。

表 2 學生前後測整體答題情況差異分析

基本學習內容	前測題目	後測題目	通過率 (人數)	通過率 (人數)	差異 分析																																								
D-C-7-1-1 統計圖表	<p>1. (<u>B</u>) 下圖是四年級男、女學生最喜歡運動項目的長條圖，下列哪個敘述正確？</p>  <p>(A) 四年級男生總共有 37 人 (B) 最喜歡跑步的學生最多 (C) 最喜歡游泳的男生人數是 5 人 (D) 長條圖中的縱軸表示四年級男女生最喜歡的項目 (108 年 4 年級篩選測驗 6)</p>	<p>7. (<u>D</u>) 下圖是四年級男、女學生最喜歡運動項目的長條圖，下列哪個敘述正確？(108 年 4 年級篩選測驗 6)</p>  <p>(A) 四年級女生總共有 38 人 (B) 最喜歡跑步的男生人數是 10 人 (C) 長條圖中的縱軸表示四年級男女生最喜歡的項目</p>	60%(3)	40%(2)	-20%																																								
D-C-7-1-1 統計圖表	<p>2. (<u>A</u>) 下圖是某地去年平均氣溫的折線圖，看圖回答問題，下面哪個敘述是錯誤的？</p>  <p>(A) 平均氣溫比 30 度高的有 7 月、8 月和 9 月 (B) 平均氣溫最高溫和最低溫相差 13 度 (C) 平均氣溫最高溫是 8 月 (D) 平均氣溫最低溫是 2 月 (108 年 4 年級篩選測驗 14)</p>	<p>8. (<u>A</u>) 下圖是某地去年平均氣溫的折線圖，看圖回答問題，下面哪個敘述是正確的？(108 年 4 年級篩選測驗 14)</p>  <p>(A) 平均氣溫比 30 度高的有 7 月、8 月和 9 月 (B) 平均氣溫最高溫和最低溫相差 13 度 (C) 平均氣溫最高溫是 8 月 (D) 平均氣溫最低溫是 2 月</p>	80%(4)	80%(4)	0%																																								
D-C-7-1-1 統計圖表	<p>3. 已知龍園國中桌遊社團「三個年級的人數」及「男女生的人數」分配表如下表，請問七年級男生人數占桌遊社團的百分比為何？</p> <table border="1"><thead><tr><th>年級</th><th>七</th><th>八</th><th>九</th><th>合計</th></tr></thead><tbody><tr><td>男生人數</td><td>10</td><td>24</td><td>9</td><td>a</td></tr><tr><td>女生人數</td><td>15</td><td>16</td><td>6</td><td>b</td></tr><tr><td>合計</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr></tbody></table> <p>(109 年成長測驗施測後回饋 8) 解： <u>12.5%</u> 。</p>	年級	七	八	九	合計	男生人數	10	24	9	a	女生人數	15	16	6	b	合計	c	d	e	f	<p>9. 已知龍園國中魔術社團「三個年級的人數」及「男女生的人數」分配表如下表，請問八年級女生人數占魔術社團的百分比為何？</p> <table border="1"><thead><tr><th>年級</th><th>七</th><th>八</th><th>九</th><th>合計</th></tr></thead><tbody><tr><td>男生人數</td><td>10</td><td>24</td><td>9</td><td>a</td></tr><tr><td>女生人數</td><td>15</td><td>16</td><td>6</td><td>b</td></tr><tr><td>合計</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr></tbody></table> <p>(109 年成長測驗施測後回饋 8) 解： <u>20%</u> 。</p>	年級	七	八	九	合計	男生人數	10	24	9	a	女生人數	15	16	6	b	合計	c	d	e	f	0%(0)	60%(3)	60%
年級	七	八	九	合計																																									
男生人數	10	24	9	a																																									
女生人數	15	16	6	b																																									
合計	c	d	e	f																																									
年級	七	八	九	合計																																									
男生人數	10	24	9	a																																									
女生人數	15	16	6	b																																									
合計	c	d	e	f																																									
D-C-7-1-1 統計圖表	<p>4. 巧巧牧場共養了 200 隻動物，下表是各種動物數量所佔的百分率，請問牧場有幾隻羊？</p> <table border="1"><thead><tr><th>種類</th><th>馬</th><th>羊</th><th>牛</th><th>豬</th></tr></thead><tbody><tr><td>百分率 (%)</td><td>25</td><td>48</td><td>12</td><td>15</td></tr></tbody></table> <p>(109 年 6 年級成長測驗施測後回饋 25) 解： <u>96</u> 。</p>	種類	馬	羊	牛	豬	百分率 (%)	25	48	12	15	<p>10. 乖乖牧場共養了 200 隻動物，下表是各種動物數量所佔的百分率，請問牧場有幾隻馬？</p> <table border="1"><thead><tr><th>種類</th><th>馬</th><th>羊</th><th>牛</th><th>豬</th></tr></thead><tbody><tr><td>百分率 (%)</td><td>25</td><td>48</td><td>12</td><td>15</td></tr></tbody></table> <p>(109 年 6 年級成長測驗施測後回饋 25) 解： <u>50</u> 。</p>	種類	馬	羊	牛	豬	百分率 (%)	25	48	12	15	40%(2)	80%(4)	40%																				
種類	馬	羊	牛	豬																																									
百分率 (%)	25	48	12	15																																									
種類	馬	羊	牛	豬																																									
百分率 (%)	25	48	12	15																																									

基本學習內容	前測題目	後測題目	通過率 (人數)	通過率 (人數)	差異 分析
D-C-7-1-1 統計圖表	<p>5. (C) 如圖為阿貴一天中的作息時間分配圖面積圖，若阿貴希望把自己每天的閱讀時間調整為 2 小時，那麼阿貴的閱讀時間需增加多少分鐘？〔91.基測II〕</p>  <p>(A) 15 (B) 48 (C) 60 (D) 105</p>	<p>1. (C) 自強國中針對 900 個學生的上學方式進行調查，將其調查結果整理成次數分配圖面積圖，如圖。若半年後再對同一批學生作相同的調查，發現上學方式除了搭公車及家長接送的比例維持不變外，步行的學生人數減少到 350 人。請問第二次調查中騎自行車上學的學生有多少人？〔91.基測I〕</p>  <p>(A) 250 (B) 350 (C) 400 (D) 450</p>	20%(1)	60%(3)	40%
D-C-7-1-1 統計圖表	<p>6. (C) 附圖為籃球社成員在數學抽考成績的次數分配直方圖，則下列敘述何者錯誤？</p>  <p>(A) 60~70 分這一組有 20 人 (B) 不及格的有 8 人 (C) 80 分以上有 9 人 (D) 組距為 10 分</p>	<p>2. (B) 附圖為排球社成員在數學抽考成績的次數分配直方圖，則下列敘述何者錯誤？</p>  <p>(A) 組距為 10 分 (B) 不及格的有 10 人 (C) 80 分以上有 10 人 (D) 60~70 分這一組有 20 人</p>	80%(4)	80%(4)	0%
D-C-7-2-2 中位數的意義、	<p>7. (A) 小惠班上 25 位同學射飛鏢命中紅心的次數依序為 3、5、5、5、2、4、6、7、3、9、0、9、3、3、4、5、1、2、3、8、1、4、6、0、3。此資料的眾數為何？〔98.基測II〕</p> <p>(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 9</p>	<p>3. (D) 安安班上有九位同學，他們的體重資料如下：57、54、47、42、49、48、45、47、50。(單位：公斤) 關於此資料的中位數與眾數的敘述，下列何者正確？〔100.基測II〕</p> <p>(A) 中位數為 49 (B) 中位數為 47 (C) 眾數為 57 (D) 眾數為 47</p>	80%(4)	100%(5)	20%
D-C-7-2-3 眾數的意義	<p>8. (B) 小惠班上比賽投籃，每人投 6 球，附圖是班上所有學生投進球數的圓形圖。根據附圖，下列關於班上所有學生投進球數的統計量，何者正確？〔102.基測〕</p>  <p>(A) 眾數為 5 (B) 眾數為 2 (C) 中位數為 3 (D) 中位數為 2.5</p>	<p>4. (B) 小華班上比賽投籃，每人投 6 球，附圖是班上所有學生投進球數的圓形圖。根據附圖，請問學生投進球數的中位數是多少球？〔102.基測〕</p>  <p>(A) 中位數為 3 (B) 中位數為 2.5 (C) 中位數為 3 (D) 中位數為 4</p>	80%(4)	40%(2)	-40%
D-C-7-2-1 平均數的意義	<p>9. (D) 某班老師算出全班 40 位學生的數學成績後，決定每人加 8 分，加分後沒有人超過滿分。若全班成績加分前的總分為 A 分，平均為 a 分；加分後的總分為 B 分，平均為 b 分，則下列關係何者錯誤？〔96.基測II〕</p> <p>(A) $A=40a$ (B) $B=40b$ (C) $b=a+8$ (D) $B=A+8$</p>	<p>5. (D) 小明前三次的考試成績分別為 87、83、88 分。若他在第四次考試後，計算四次的平均分數，發現比前三次的平均分數多 1 分，則小明第四次的成績為幾分？〔97.基測II〕</p> <p>(A) 87 (B) 88 (C) 89 (D) 90</p>	20%(1)	20%(1)	0%
D-C-7-2-1 平均數的意義	<p>10. (D) 某高中的籃球隊成員中，一、二年級的成員共有 8 人，三年級的成員有 3 人。一、二年級的成員身高(單位：公分)如下：172、172、174、174、176、176、178、178。若隊中所有成員的平均身高為 178 公分，則隊中三年級成員的平均身高為幾公分？〔106.會考〕</p> <p>(A) 178 (B) 181 (C) 183 (D) 186</p>	<p>6. (A) 三年 1 班有男生 a 人、女生 b 人。男生體重的平均數是 56 公斤，女生體重的平均數是 48 公斤。若全班體重的平均數是 54 公斤，則 a 與 b 的數量關係為何？〔93.基測I〕</p> <p>(A) $a=3b$ (B) $3a=b$ (C) $7a=6b$ (D) $6a=7b$</p>	20%(1)	0%(0)	-20%

三、教學反思與建議

(一) 反思

本教學嘗試以遊戲包裝教學活動，讓學生在活潑、愉快的遊戲情境中學習數學，藉由遊戲積點的方式，協助學生：能報讀生活情境中分類的統計圖表、能理解列聯表及解決日常生活中的問題、能從資料中找到眾數、計算平均數、中位數，並解決簡單平均數、中位數問題，進一步能夠整理多筆的資料並選取適當的表示方式。在遊戲競賽的過程中，也可培養孩子小組合作的學習態度及相互溝通協調的能力，進一步解決情境中的問題，最後再以數感同心圓的方式做結尾。期望孩子能藉由融入生活情境的問題，在遊戲的氛圍下，提高學習興趣，感受並體會到學會數學知識的快樂。

在實際教學過程中，透過生活中的實例、動手操作、圖像、情境、對話討論等表徵，逐步說明為何需要統計圖表與統計數據分析，以及學習統計圖表與統計數據分析的概念，避免直接進行算則或者流於公式的記憶而無法理解統計的思維。然而學生基礎運算能力將會是影響教學進度的進行，如段考成績的加總， $87+85+93+93+90=448$ ，有孩子會算出 398 或 504 的答案；又如將全班的數學小考成績以分組方式來統計人數時，5 位孩子沒有一位是全對的；3 位數除以 2 位數時，有孩子從個位開始除；在面對除法需取小數的計算時，孩子忘了如何計算，必須幫孩子重新學習，因此，若每一位孩子的斷點都有補足了，再來進行本教學模組，相信教學成效會更好。

如果教師可以製造學習的共同感而非競爭環境，讓大家可以互相教、互相學，創造一個良好且正向的環境來讓孩子來經歷，激發自己內在學習的動機，並善加運用數位科技媒材，增加多元的刺激，孩子的表現會更加好。

(二) 建議

1. 降低學習門檻

在教學過程中，可以輔以計算機教學，降低學生因為計算錯誤而產生的學習挫敗感；另外，有關除法的運算，可以調整數據，盡量在計算過程中以整數為主。

2. 調整活動順序

活動設計每單元可獨立運用，可依學生學習狀況調整活動先後順序。例如可以將資料大搜查的活動調整到好用的圖表之後，先將統計圖表的概念全部引導好之後，再進行統計應用。

3. 調整教學內容

為了提升學生學習的動機，採用遊戲積點的方式來進行，最後一個「束感同心圓」活動，可依學生學習狀況與時間考量，省略不進行，改以點數換物的方式獎勵學生的學習表現。

參考文獻

李健恆、楊凱琳 (2012)。從統計認知面向與圖表理解角度分析國中數學教科書的統計內容。教科書研究，5(2)，31-72。國家教育研究院。

Rumsey, D. J. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education, 10(3)*. Retrieved from <https://jse.amstat.org/v10n3/rumsey2.html>

國中數學領域 補強課程模組 4

七年級

二元一次聯立方程式的幾何意義

— 臺南市創思與教學研發中心 蘇恭弘研究教師

設計
理念

教學者在教學現場中發現，學生在學習「二元一次聯立方程式及其圖形」單元時，經常會出現許多迷思概念或錯誤類型。李憶琴（2007）的研究亦發現，學生在此單元計算產生的錯誤包括等量公理、分配律、四則運算、指數律以及分數的特殊型態...，探究其原因有些來自於學生對於二元一次方程式的意義尚未清楚理解，所以只是模仿教師的作法與經驗來解題；當遇到生活情境問題或文字題時，容易出現文字轉譯及整合的錯誤，導致全盤崩潰。此外，由於考試的題型讓學生未真正了解二元一次方程式所代表圖形的特性和樣貌，因此，容易產生學習成效不佳的情形。

研究者根據過去相關文獻指出有關二元一次方程式的迷思有以下幾類：

（一）不了解二元一次方程式的圖形為直線，反之亦同

游鯉謙（2004）有提到，學生在學習二元一次方程式的意義與圖形時，無法將此概念連結到坐標平面的直線。有時，學生會利用代數式求出一解，例如：要將 $(3, -2)$ 繪製於直角坐標平面的時候，學生卻會把 $(3, -2)$ 這一個點分開描點，成為 $(3, 0)$ ， $(0, -2)$ 進行。此現象代表學生並未理解直角坐標的意義；同樣的，學生對於直角坐標平面上的兩點可連成一條直線的概念不清楚。

（二）未理解直線上的點即代表二元一次方程式的解

學生在描繪二元一次方程式的圖形時，並不了解直線上任一點的座標皆為二元一次方程式的解。因此，當他們要處理二元一次聯立方程式求解時，無法將聯立方程式的解與畫出來的兩條圖形相交的點連結（李佩珊，2007；游鯉謙，2004）。

- (三) 無法理解直線上所有點的點坐標都是此二元一次方程式的解，卻認為直線上僅有兩個點

學生在此會經常出現錯誤，探究其原因，可能在於學生尚未內化成知識時，教師就教導學生「兩點可連成一直線」教導學生繪製圖形，這可能是造成學生誤認「一條直線上只有兩點」的錯誤觀念 (戴文賓、邱守榕，2000)。

- (四) 誤將二元一次方程式的係數當成點座標

學生無法理解直線方程式的未知數與係數之關係，直觀的把二元一次方程式中的係數當成點座標來描繪直線圖形，導致產生答題錯誤的現象。

- (五) 無法畫出鉛垂線或水平線的方程式圖形 (如 $x = c$ 或 $y = c$)

學生對於二元一次方程式的特例：鉛垂線與水平線圖形無法確實作圖。探究其原因可能源於學生不理解此二類直線是屬於另一個未知數為 0 的特例，導致無法掌握方程式的樣貌，進而不知如何求解找出要繪製圖形的二個點 (李佩珊，2007；游鯉謙，2004)。

- (六) 無法了解二元一次聯立方程式的解即為兩直線的交點

學生可透過加減消去法或代入消去法輕易求得其解。但是由於不知道解的意義，再加上兩個未知數代入方程式求解錯誤，造成無法順利在座標平面上畫出相對的直線圖形，使自己的作答面臨窘境 (蕭中璽，2014；簡銘賢，2012；李佩珊，2007)

上述關於學生學習二元一次聯立方程式時常常出現的迷思概念或錯誤類型，本補強課程模組採用「動手操作」與「遊戲」的元素，希望學生在操作的過程中，藉此讓迷思概念獲得澄清，而非以練習題目的方式來達到熟練的目標。本模組教學設計先複習並強化「二元一次方程式解的概念」，再讓學生自己尋找二元一次方程式的解。因此，採用「圍棋棋子」，讓學生能夠具象地看到二元一次方程式的解在直角平面坐標的位置，由圍棋棋盤對應至自己動手畫的直角坐標系；接下來，利用「圍棋棋子」的擺放，確認學生對於直角坐標概念是否清楚，也因為是學生自行擺放棋子，更可使學生感受「二元一次方程式的圖形為直線」，而不是單純的死背記憶；透過「網路遊戲的地圖」讓學生有動機去瞭解某個位置有沒有在直線上；同時對於「不易畫出鉛垂線或水平線的方程式圖形 (如 $x = c$ 或 $y = c$)」這個迷思，本教材進行與課本不同的地方在於「先觀察、後驗證」，先利用圍棋棋子的擺放，讓學生在視覺上有感，感受二元一次方程式的解在棋盤上擺放後竟然會形成「鉛垂線」或「水平線」，再利用代數的計算加以驗證，這是本課程的一大嘗試。

當學生能畫二元一次方程式圖形並且瞭解它的概念後，在課程進入到要繪製出二元一次聯立方程式的圖形時，相對地會比較容易，因為繪製二元一次聯立方程式的圖形只不過是畫了二次的二元一次方程式的圖形，這對學生而言，先備經驗已熟悉，並不難接受。

而在「二元一次聯立方程式圖形的交點為其聯立方程式的解」部份，特別強調且先奠基於視覺可見的基礎下，再透過代數的方法驗證，希冀學生能由具體到抽象的學習，在不需強記死背的氛圍下提高學習興趣，感受並體會到學懂數學知識的快樂。

課程 架構



關於本模組涉及的主題及核心概念，如圖 1：

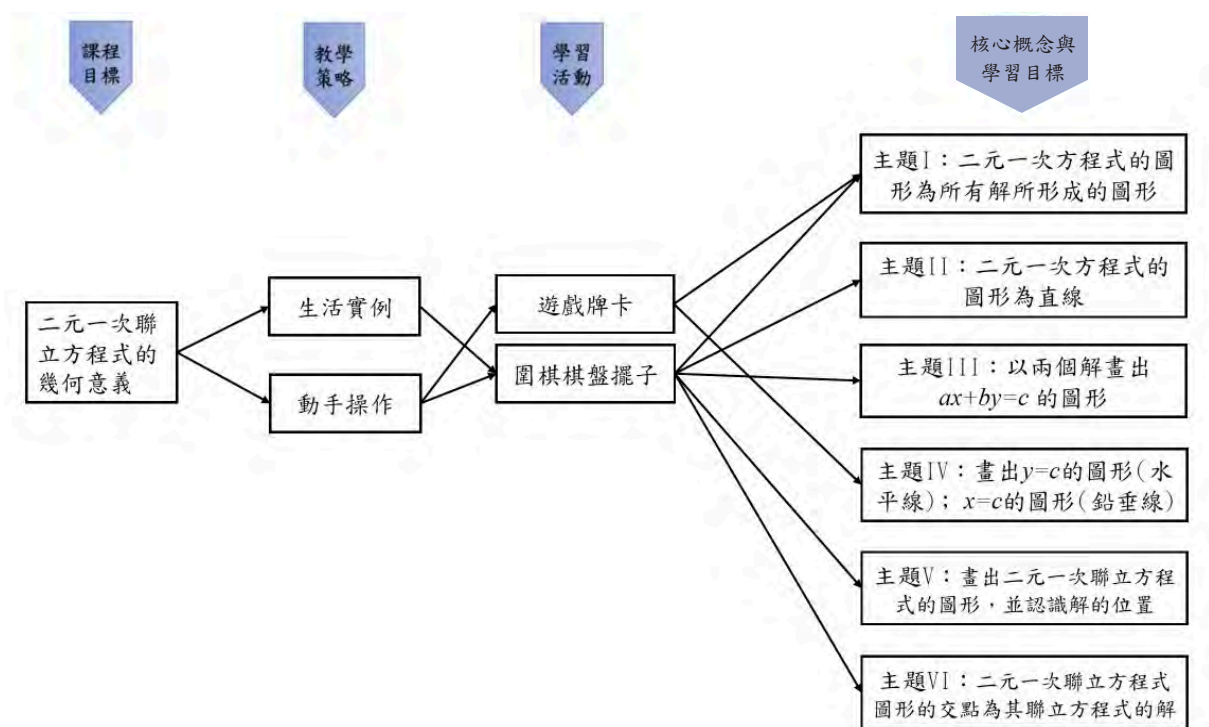


圖 1 課程架構圖

- (一) 主題 I (第 1~2 節課): 配合學習單一 (附件 1) 及自製的牌卡 (附件 4), 二人一組, 由學生輪流翻牌, 例如題目卡是 $x+2y=6$, 如果翻出 $x=8, y=-1$ 這張牌, 因為 $x=8, y=-1$ 是 $x+2y=6$ 的解, 由遊戲且分組的方式讓學生複習 x, y 之值是否為二元一次方程式的解, 然後透過圍棋與黑白子的擺放, 讓學生看到當 x, y 之值是二元一次方程式的解與非二元一次方程式的解時, 在圍棋棋盤上會形成的樣子, 讓學生感受二元一次方程式圖形的樣子, 但並不立刻進入圖形, 而是讓學生能自行且正確地找出二元一次方程式的多個解。
- (二) 主題 II (第 1~2 節課): 配合學習單一 (附件 1), 當學生已能正確地找到二元一次方程式的解後, 請學生將所有 x, y 之值轉換成數對放入圍棋棋盤內, 讓學生自行發現二元一次方程式的解可能會形成的圖形是一直線, 而非此方程式的解的數對, 好像也不會在此圖形上, 得到「如 $x=4, y=1$ 是二元一次方程式 $x+2y=6$ 的一組解, 所以 $(4, 1)$ 在 $x+2y=6$ 的圖形上; 但 $(-2, -4)$ 亦即 $x=-2, y=-4$ 不是二元一次方程式 $x+2y=6$ 的一組解, 所以 $(-2, -4)$ 不在 $x+2y=6$ 的圖形上的觀念。
- (三) 主題 III (第 3 節課): 配合學習單一 (附件 1), 延續第 2 節所建立的觀念, 讓學生思考二元一次方程式的解有無限多個, 如何能簡化地來畫出二元一次方程式的圖形, 此處, 透過教師引導學生在圍棋棋盤上拿取棋子, 進而得出最少二個點可畫出一條直線, 亦即只要有以兩個解就能畫出 $ax+by=c$ 的圖形。
- (四) 主題 IV (第 4 節課): 配合學習單二 (附件 2), 再次利用牌卡與圍棋, 讓學生在圍棋棋盤內看到擺上的棋子會逐漸形成水平線與鉛垂線, 因此建立起 $y=c$ 圖形與 $x=c$ 圖形會是水平線與鉛垂線的概念。
- (五) 主題 V (第 5 節課): 配合學習單三 (附件 3), 當學生可以畫出一條二元一次方程式的圖形之後, 引導學生去嘗試「若是畫二條二元一次方程式又會如何呢?」這裡的重點在於慢慢地讓學生看到二元一次聯立方程式的解會往某個數對靠近, 進而瞭解二元一次聯立方程式解的概念。
- (六) 主題 VI (第 6 節課): 配合學習單三 (附件 3), 當學生已經有二元一次聯立方程式解的概念後, 再說明二元一次聯立方程式的交點坐標, 會不會是二元一次聯立方程式的解呢? 透過計算的驗證, 讓學生的觀念得以落實。

教材 分析



(一) 本補強課程模組教材重要性

本補強課程模組的主題為「二元一次聯立方程式的幾何意義」，此主題是學生由代數表徵轉化到幾何表徵的一個重點關鍵，許多學生接觸二元一次方程式，學習以符號代替未知數、學會列式，甚至學習聯立方程式，當他們將方程式的解轉換成數對放在直角坐標平面上後，就開始產生混淆了。而「二元一次聯立方程式的幾何意義」。對於後續一次函數與二次函數的圖形，甚至是高中的三次函數圖形的學習有很深的影響性，充份顯示出其承先啟後的教材地位。

當我們在說明二元一次方程式的圖形時，會用到許多不同的表徵，如「列表」、「代數式」、「圖形」與「文字敘述」，本教材嘗試透過活動的進行，讓學生在「列表」、「代數式」、「圖形」三者間能夠自然的轉換，進而學會本單元。

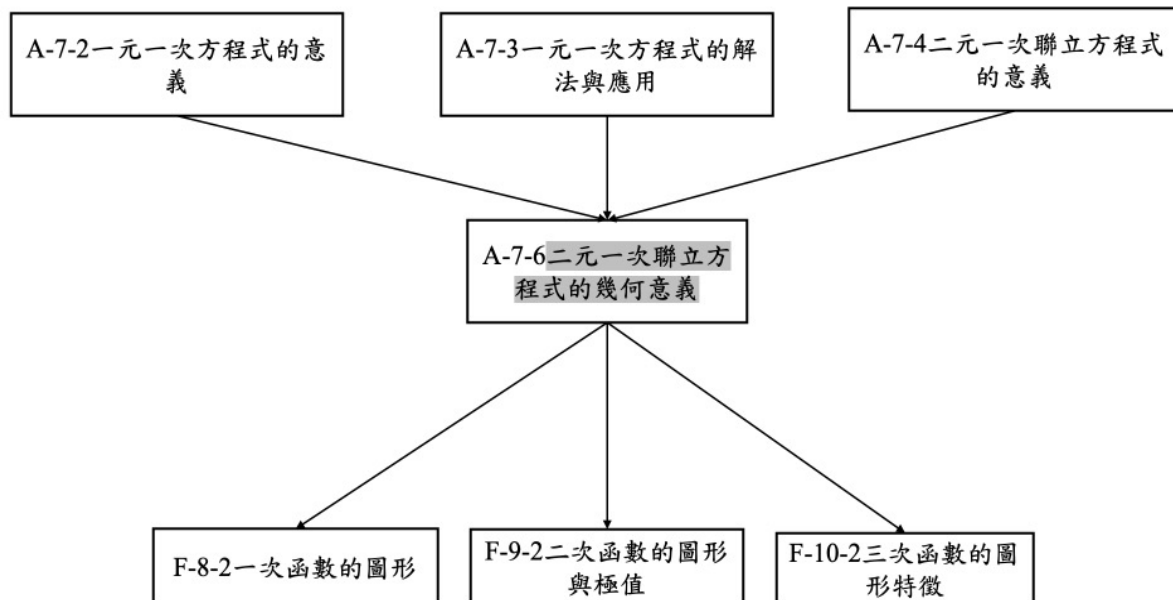


圖 2 課程內涵與其他學習內容間的關係圖

(二) 本補強課程模組教材學習內容分析

本補強課程模組「二元一次聯立方程式的幾何意義」的教材學習內容，分為「瞭解二元一次方程式圖形的意義並畫出二元一次方程式的圖形」及「瞭解二元一次聯立方程式的幾何意義並畫出二元一次聯立方程式的圖形」二部分，希望學生依按部就班地打好畫二元一次方程式的圖形的基礎後，以此基礎進入瞭解二元一次聯立方程式的幾何意義，並為銜接未來瞭解一次函數或二次函數圖形奠立良好的根基。本補強課程模組教材基本學習內容如圖 3 所示：

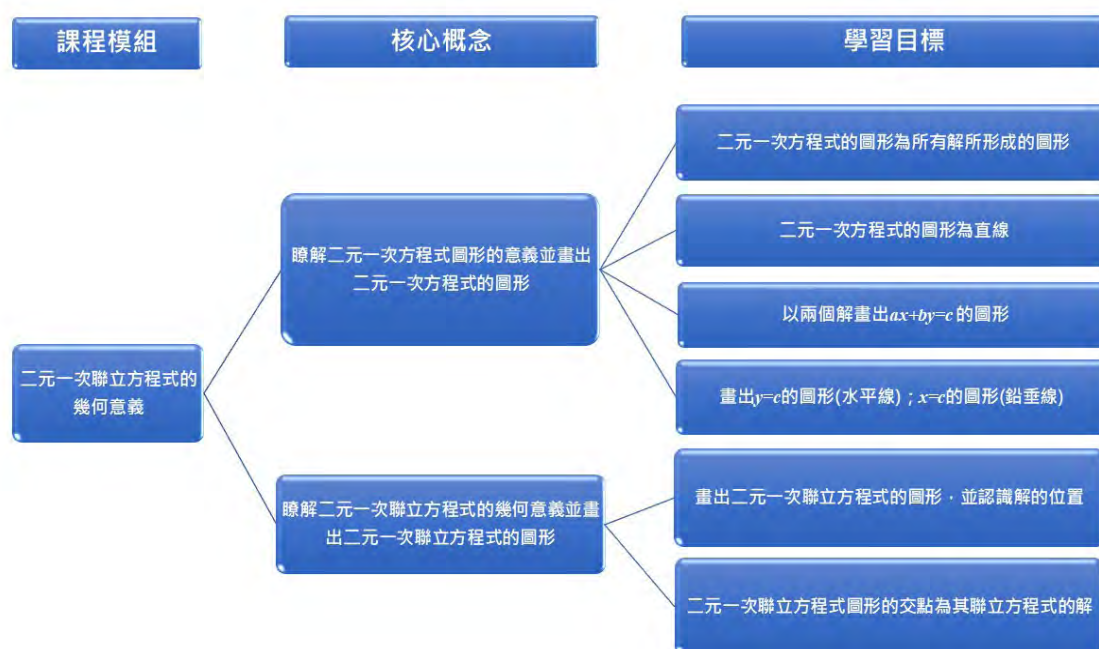


圖 3 本補強課程模組教材基本學習內容

(三) 教材分析與課程架構的關係

有關本補強課程模組的教材分析與課程架構如下表 1 所示：

表 1：本補強課程模組教材分析與課程架構教學關係

教材分析	課程架構		教學關聯
瞭解二元一次方程式圖形的意義並畫出二元一次方程式的圖形	生活實例動手操作	主題 I (第 1~2 節課)	學習單一 (附件 1) 及自製的牌卡 (附件 4)，二人一組，由學生輪流翻牌，讓學生複習數對是否二元一次方程式的解。然後透過圍棋與黑白子的擺放，讓方程式的解與數對在直角平面坐標的位置能讓學生很直觀的看到，產生原來如此的感覺。
		主題 II (第 1~2 節課)	透過二元一次方程式的解及非解，在圍棋所形成的直角坐標上將黑白棋子進行擺放，建立二元一次方程式的解與圖形坐標之間的連結。
		主題 III (第 3 節課)	透過教師引導學生在圍棋棋盤上拿取棋子，進而得出最少二個點可畫出一條直線，讓學生建立兩點即可畫出一直線的概念。
瞭解二元一次聯立方程式的幾何意義並畫出二元一次聯立方程式的圖形	動手操作	主題 IV (第 4 節課)	用牌卡與圍棋棋子，讓學生在圍棋棋盤內看到棋子逐漸形成了水平線與鉛垂線，建立起 $y = c$ 的圖形 (水平線)； $x = c$ 圖形 (鉛垂線) 的概念。
		主題 V (第 5 節課)	我們先前已建立二元一次方程式圖形的概念，接下來去進入引導學生「若是畫二條二元一次方程式又會如何呢？」 這裡的重點在於慢慢地讓學生看到二元一次聯立方程式的解會往某個數對靠近，進而看到二元一次聯立方程式的交點。
		主題 VI (第 6 節課)	利用第 5 節已經幫學生建立的二元一次聯立方程式交點的概念，接下來再讓學生探討這個交點是否為方程式的解，利用計算的驗證，讓學生的觀念得以落實。

教學計畫



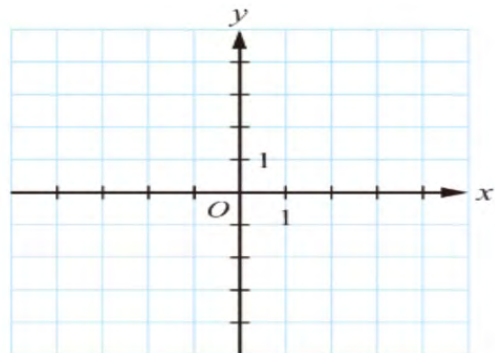
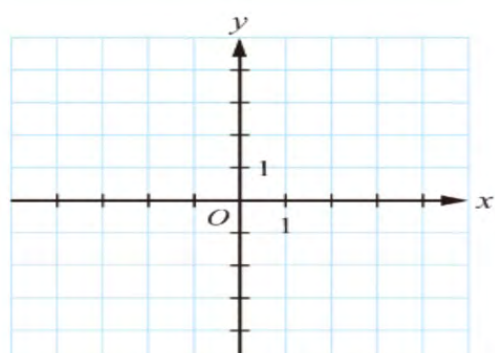
模組名稱	二元一次聯立方程式的幾何意義
授課節數規劃	六節課
學習重點 (內容、概念、能力)	<p>學習內容</p> <p>A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義：$ax + by = c$ 的圖形；$y = c$ 的圖形（水平線）；$x = c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。</p> <p>學習表現</p> <p>g-IV-2 在直角坐標上能描繪與理解二元一次方程式的直線圖形，以及二元一次聯立方程式唯一解的幾何意義。</p> <p>a-IV-4 理解二元一次聯立方程式及其解的意義，並能以代入消去法與加減消去法求解和驗算，以及能運用到日常生活的情境解決問題。(本教材只處理前半段「理解二元一次聯立方程式及其解的意義」，未涉及「代入消去法與加減消去法求解和驗算，以及能運用到日常生活的情境解決問題」)。</p> <p>基本學習內容</p> <p>AC-7-6-1 畫二元一次方程式圖形。</p> <p>AC-7-6-2 畫二元一次聯立方程式的圖形。</p>
適用對象	<p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容</p> <p>A-7-2 一元一次方程式的意義</p> <p>A-7-3 一元一次方程式的解法與應用</p> <p>A-7-4 二元一次聯立方程式的意義</p>
教學連結建議	本單元未來可連結至○國中 F-8-2 一次函數的圖形及 F-9-2 二次函數的圖形以及高中 F-10-2 三次函數的圖形特徵等學習內容。

學習目標	<p>第 1~2 節</p> <p>一、能理解二元一次方程式的圖形為所有解所形成的圖形。</p> <p>二、能理解二元一次方程式的圖形為直線。</p> <p>第 3 節</p> <p>三、能以兩個解畫出 $ax + by = c$ 的圖形。</p> <p>第 4 節</p> <p>四、能畫出 $y = c$ 的圖形 (水平線) ; $x = c$ 的圖形 (鉛垂線) 。</p> <p>第 5 節</p> <p>五、能畫出二元一次聯立方程式的圖形，並認識解的位置。</p> <p>第 6 節</p> <p>六、能理解二元一次聯立方程式圖形的交點為其聯立方程式的解。</p>
教學材料 教學資源	<p>1. 康軒電子書： https://webetextbook.knsh.com.tw/2/index.html?code_degree=2</p> <p>2. 翰林電子書： https://www.hle.com.tw/inpage02.html</p> <p>3. 南一電子書： https://trans.nani.com.tw/TeacherCloud/jteacher/</p> <p>4. 網路資源：數學生根新世界教材 https://www.nhmath.com/NH-MATH/resources/</p> <p>5. 自編學習單 1、2、3</p> <p>6. 自製二元一次方程式及解的牌卡。</p> <p>7. 圍棋棋盤與黑白棋子若干個。</p>

主題 I：二元一次方程式的圖形為所有解所形成的圖形

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>第 1、2 節</p> <p>【學生的生活情境引入】</p> 	<p>本例由網路遊戲 -- 絕地求生 (PUBG) 的地圖引入，亦可換成其他學生熟悉的生活情境。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項																																													
<p>老師：同學們，在網路遊戲的地圖，如果您想要從 P 城出發設計一條攻擊路線，想要最快速到達 Y 城，請問該如何設計？</p> <p>學生：應該要設計成一直線。</p> <p>老師：為什麼？</p> <p>學生：因為直線的距離最短。</p> <p>老師：如圖，請問這條攻擊路線會不會通過學校呢？</p> <p>學生：不一定。</p> <p>老師：請問該如何確定？</p> <p>學生：...</p> <p>藉此討論引入讓學生思考是否能夠應用直角坐標的概念來解決此問題，於是展開主題 I 的活動。</p> <p>活動 1【讓學生比賽找出二元一次方程式的解】</p> <p>材料：二元一次方程式的圖片數張、解的卡片數張，如下圖，</p> <p>題目卡</p> <div><div>$x + 2y = 6$</div><div>$x - 2y = 6$</div></div> <p>答案卡有 12 張</p> <div><div>$x = 0$ $y = 6$</div><div>$x = 6$ $y = 0$</div><div>$x = 2$ $y = 2$</div><div>$x = 1$ $y = 5$</div><div>$x = -2$ $y = -4$</div><div>$x = -2$ $y = 4$</div><div>$x = -2$ $y = 2$</div><div>$x = 0$ $y = 3$</div><div>$x = 4$ $y = -1$</div><div>$x = -6$ $y = 0$</div><div>$x = -4$ $y = 5$</div><div>$x = 4$ $y = 1$</div></div> <p>作法</p> <p>二人一組，將答案卡洗勻牌面朝下，由學生輪流翻牌，例如題目卡是 $x + 2y = 6$，如果翻出 $x = 8$，$y = -1$ 這張牌，因為 $x = 8$，$y = -1$ 是 $x + 2y = 6$ 的解，此時您要在學習單上寫入 x，y 之值，並在「是否為解」那格註記○，若抽到 $x = 2$，$y = -2$ 那張牌，因為它不是 $x + 2y = 6$ 的解，則要在學習單「是否為解」那格註記×</p> <div><div>二元一次方程式：$x + 2y = 6$</div><table><tr><td>x 值</td><td>8</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>y 值</td><td>-1</td><td>-2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>是否為解</td><td>○</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></div>	x 值	8	2													y 值	-1	-2													是否為解	○	×													<p>如果學生在判斷二元一次方程式的解時，常常發生錯誤，教師並不必要急著糾正或是給予提示，因為當學生找解出現錯誤時，透過活動 2 的進行，就能讓學生自己發現，此處建議教師可以放心讓學生去嘗試。</p>
x 值	8	2																																												
y 值	-1	-2																																												
是否為解	○	×																																												

教學活動流程設計	教學注意事項																								
<div>教師提問 1</div> <div>同學們如何確定這個牌卡上所寫的是 x、y 之值是否為 $x+2y=6$ 的解？</div> <div>學生回答</div> <div>將 x、y 之值代入 $x+2y=6$，能夠讓等號成立的 x、y 之值就是方程式的解。</div> <div>練習 1</div> <div>任意找出二元一次方程式 $x-y=0$ 的五組解，並將它們畫到坐標平面上。</div> <div><table><tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></div> <div>練習 2</div> <div>任意找出二元一次方程式 $x-2y=1$ 的五組解，並將它們畫到坐標平面上。</div> <div><table><tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></div>	x						y						x						y						<div>在這個活動進行時，部分學生可能對於二元一次方程式解的意義還未掌握，教師可在活動中適時提醒與複習。</div> <div>以下三個練習目的是讓未熟悉二元一次方程式的意義的同學有練習的機會，教師也可在進行完活動之後，再讓學生進行練習，可以讓數學更順暢。</div>
x																									
y																									
x																									
y																									

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>練習 3：任意找出二元一次方程式 $y=3x-2$ 的五組解，並將它們畫到坐標平面上。</p> <div data-bbox="209 465 833 553" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="255 600 759 963" data-label="Figure"> </div> <p>活動 2【將二元一次方程式的解換成圍棋黑白子放在圍棋棋盤上】</p> <p>請同學將上面這 12 組 x、y 之值，以坐標 (x, y) 的形式擺到圍棋棋盤上，一人持黑子、一人持白子。例如 $x=0, y=6$，則將棋子放在坐標平面 $(0, 6)$ 這個點上，將 12 組 x、y 之值改成坐標形式，依序在棋盤內擺好這 12 個棋子。</p> <div data-bbox="229 1404 611 1783" data-label="Figure"> </div>	<p>當教師請學生將二元一次方程式的解換在圍棋黑白子放在圍棋棋盤上時，可選擇告訴學生原點、x 軸與 y 軸的位置，也可由學生自己去約定。</p> <p>在這裡特別設計讓學生能覺察 $x+2y=6$ 的解形成的圖形，但是學生擺放棋子時，也包含了不是 $x+2y=6$ 解的棋子，因此請教師要放慢引導速度。</p>

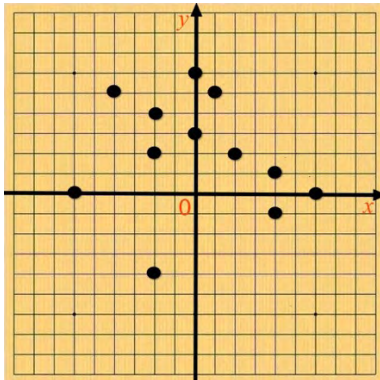
主題 II：二元一次方程式的圖形為直線

教學活動流程設計

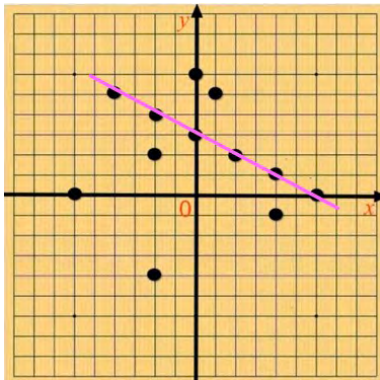
教學注意事項

教師提問 1

請同學指出 $x+2y=6$ 的解所形成的圖形在哪裡？

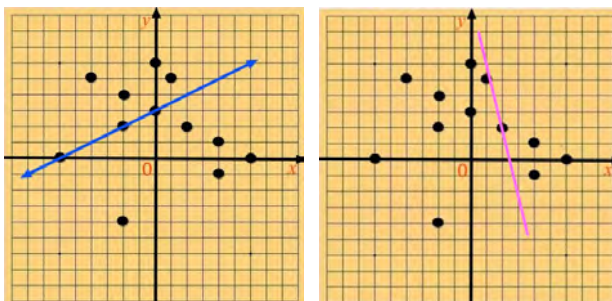


學生回答



教師提問 2

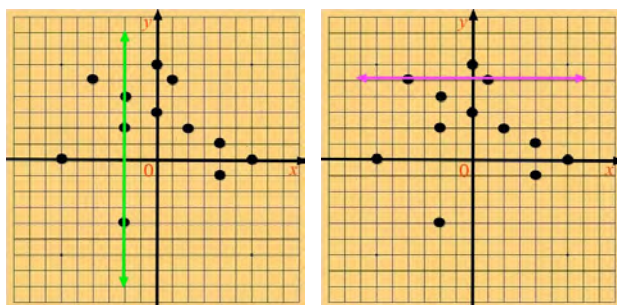
為什麼不是以下圖形其中之一呢？



這個問題的目的是為了讓學生能感受到二元一次方程式的解會形成一條直線，但是否能找到尤其解所形成的那條直線是此處的重點？

如果學生找到其他的棋子所形成的直線，教師也可用學生所找到的例子來進行討論。

教學活動流程設計

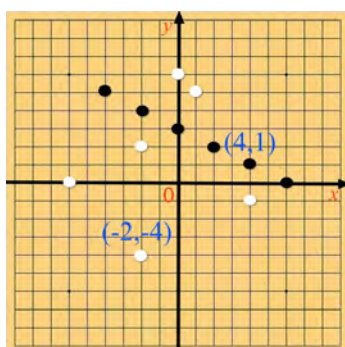


學生回答

因為它看起來比較直。

教師說明

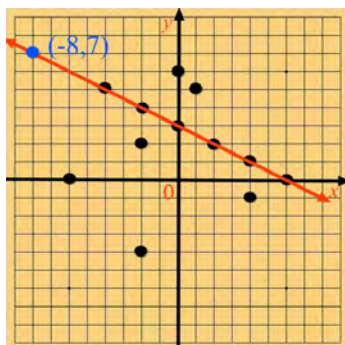
請同學將不是 $x+2y=6$ 的解的棋子，改用不同顏色的棋子擺放（例如是「解」為黑子，則「不是解」就放白子）。



$x=4$ ， $y=1$ 是二元一次方程式 $x+2y=6$ 的一組解，所以 $(4, 1)$ 在 $x+2y=6$ 的圖形上，而 $x=-2$ ， $y=-4$ 不是二元一次方程式 $x+2y=6$ 的一組解，所以 $(-2, -4)$ 不在 $x+2y=6$ 的圖形上

教師提問 3

同學們是否發現這條連線上面，好像還有其他的點坐標，例如 $(-8, 7)$ ，這些點坐標跟 $x+2y=6$ 有什麼關聯呢？



教學注意事項

讓學生將不是解的棋子換顏色，對於二元一次方程式的解會形成一條直線有很大的幫助，教師在此處可進行的慢一點，看學生會出現哪些錯誤。

在棋盤上可擺放的棋子數量有限，讓學生感受在這條直線的延伸處，雖然沒有擺放棋子，但仍然會是這個直線方程式的解。

學生常常會提問：小數、或分數無法在棋盤中擺放，老師可提醒學生棋盤只是輔助，實際在上直角坐標單面上我們仍然可以將格子細分，繼續找出位置為分數的點坐標。

教學活動流程設計

教學注意事項

小提醒：

本模組雖然設計為小組活動，但除了小組的活動外，教師可適時進入全班的活動，例如準備磁鐵，讓全班學生可在坐標平面上標示答案，來增進同學的參與及掌握學習情形。



學生回答

點 $(-8,7)$ 它也在這條連線上，因為將 $x=-8$ ， $y=7$ 代入二元一次方程式 $x+2y=6$ 符合此方程式，表示 $(-8,7)$ 也是二元一次方程式 $x+2y=6$ 的一組解。

觀察到的結論：二元一次方程式的解會形成一條直線，在直線上的點都是此二元一次方程式的解；不在二元一次方程式圖形的直線上的點坐標，就不是此方程式的解。

回到最剛開始的問題



教學活動流程設計	教學注意事項
<p>教師提問 4</p> <p>從 P 城設計一條攻擊路線，要能最快速到達 Y 城，若透過 P 城與 Y 城的坐標求得這條攻擊路線的二元一次方程式為 $3x-4y=-5$，學校的坐標是 $(2, 3)$，這條攻擊路線是不是會通過學校呢？</p> <p>學生回答</p> <p>將 $(2, 3)$ 代入 $3x-4y=-5$ 得 $3 \times 2 - 4 \times 3 = -6$ 因為 $-6 \neq -5$ 所以 $(2, 3)$ 不是二元一次方程式 $3x-4y=-5$ 的解故知這條攻擊路線不會通過學校</p> <p>練習 1</p> <p>已知 $(-4, 5)$ 在二元一次方程式 $ax+3y=9$ 上，請問 a 的值 = ?</p> <p>Ans :</p> <p>因為 $(-4, 5)$ 在二元一次方程式 $ax+3y=9$ 上，所以 $x=-4, y=5$ 是 $ax+3y=9$ 的一組解。</p> <p>將 $x=-4, y=5$ 代入 $ax+3y=9$ 得</p> $-4a+15=9$ $-4a=-6$ $a=-\frac{2}{3}$ <p>練習 2</p> <p>已知二元一次方程式 $2x-5y=b$ 通過原點，請問 b 的值 = ?</p> <p>Ans : $\frac{2}{3}$</p> <p>因為二元一次方程式 $2x-5y=b$ 通過原點，所以 $x=0, y=0$ 是 $2x-5y=b$ 的一組解。</p> <p>將 $x=0, y=0$ 代入 $2x-5y=b$ 得 $b=0$</p> <p>練習 3</p> <p>已知二元一次方程式 $x-4y=9$ 與 x 軸交於 A 點，請問 A 的坐標 = ?</p> <p>Ans :</p> <p>因為 x 軸上任一坐標的 y 坐標均為 0</p> <p>所以將 $y=0$ 代入 $x-4y=9$ 得 $x=9$，故 A 點坐標為 $(9, 0)$</p>	<p>可提醒學生 $(-4, 5)$ 在 $ax+3y=9$ 上，所以 $x=-4, y=5$ 是 $ax+3y=9$ 的解。目的是讓學生理解 $(-4, 5)$ 與 $x=-4, y=5$ 不同的表徵與可以如何互換。</p> <p>目的是提醒原點的坐標為 $(0, 0)$</p> <p>目的是提醒 x 軸上任一點的 y 坐標均為 0。</p>

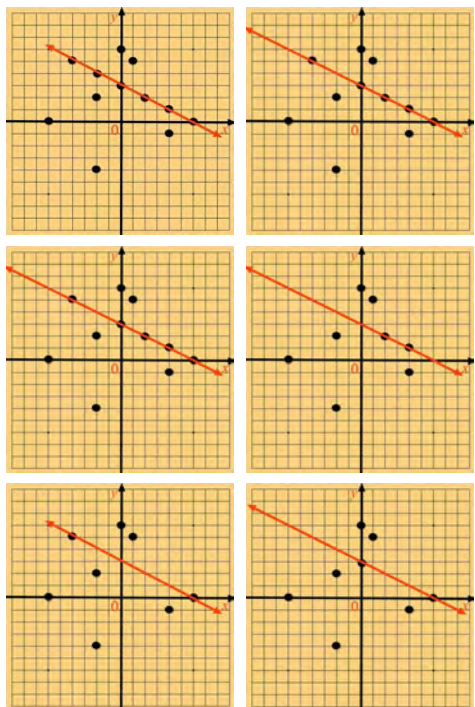
教學活動流程設計	教學注意事項
<p>練習 4</p> <p>已知二元一次方程式 $y=3x-6$ 與 y 軸交於 B 點，請問 B 的坐標 =?</p> <p>Ans :</p> <p>因為 y 軸上任一坐標的 x 坐標均為 0</p>	<p>目的是提醒 y 軸上任一點的 x 坐標均為 0。</p>
<p>練習 5</p> <p>已知 $(a,1)$、$(-3,b)$ 在二元一次方程式 $2x+y=4$ 的圖形上，請問 a、b 之值 =?</p> <p>Ans :</p> <p>因為 $(a,1)$、$(-3,b)$ 在二元一次方程式 $2x+y=4$ 的圖形上，分別將 $(a,1)$、$(-3,b)$ 代入 $2x+y=4$ 可得， $2a+1=4$，$a=\frac{3}{2}$，$-6+b=4$，$b=10$</p>	<p>目的是提醒在方程式上的點，就是此方程式的解。</p>
<p>練習 6</p> <p>已知 $(2,-1)$、$(3,2)$ 都在二元一次方程式 $y=ax+b$ 的圖形上，請問此方程式為何？</p> <p>Ans :</p> <p>因為 $(2,-1)$、$(3,2)$ 在二元一次方程式 $y=ax+b$ 的圖形上，分別將 $(2,-1)$、$(3,2)$ 代入 $y=ax+b$， 可得二元一次聯立方程式 $\begin{cases} -1=2a+b \dots (1) \\ 2=3a+b \dots (2) \end{cases}$ $(2)-(1)$ 得 $a=3$，將 $a=3$ 代入 (1)，得 $b=-7$ 此二元一次方程式為 $y=3x-7$</p>	<p>目的是提醒在二元一次方程式可以假設為 $y=ax+b$ 教師若發生學生在解二元一次聯立方程式有困難可適時進行複習</p>

主題 III：以兩個解畫出 $ax+by=c$ 的圖形

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>第 3 節</p> <p>教師提問 1</p> <p>在之前的練習中，我們已找出 6 組 $x+2y=6$ 的解，且瞭解這 6 組解寫成數對後，都會在 $x+2y=6$ 的圖形上，如果我們將中間幾個棋子拿掉，是不是仍然可以看出此二元一次方程式 $x+2y=6$ 的圖形呢？</p>	<p>讓學生透過操作 $x+2y=6$ 的解是否可減少，但仍然保持看出它的圖形，這是很好的發現，請教師讓學生能盡可能自己發現結論，而不是由教師直接告知結果，因此請教師可慢慢引導不用太著急暗示結論</p>

教學活動流程設計

教學注意事項



我們知 $x+2y=6$ 在坐標平面的 6 組解就是圍棋上看到的 6 個黑棋，如果老師隨便拿掉這 6 個黑棋的其中 1 個棋子，這條直線的方向會不會改變？

學生回答

不會

教師提問 2

如果拿掉 2 個黑棋，這條直線的方向會不會改變？

學生回答

還是不會

教師提問 3

請問目前有 6 個黑棋，最多只能拿掉幾個黑棋，才能確保這條直線的方向才不會改變？

學生回答

4 個黑棋

教師提問 4

為什麼只能拿 4 個黑棋，不能拿走 5 個黑棋呢？

學生回答

因為拿走 5 個黑棋後，我們只知道 $x+2y=6$ 的一個解，因此無法決定這條直線的方向要朝哪個方向走，所以不能拿走 5 個黑棋。

教學活動流程設計

教學注意事項

教師提問 5

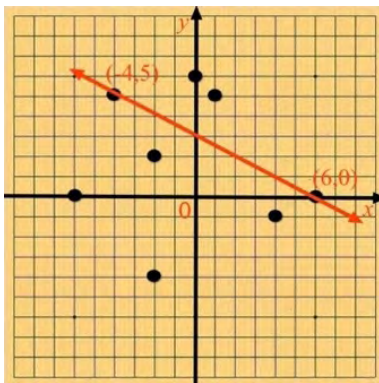
所以最少要保留幾個黑棋，才能保持這條直線的方向不變呢？

學生回答

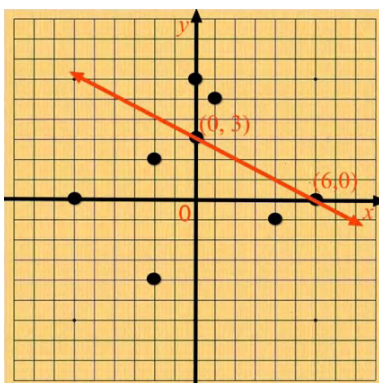
最少要有 2 個黑棋。

觀察到的結論

- (1) 二元一次方程式的解會形成一條直線，且只要有任意 2 個解，就能畫出此二元一次方程式的圖形。例如圖中的 $(-4, 5)$ 及 $(6, 0)$ 。



- (2) 因為 $x=0$ 時 y 之值與 $y=0$ 時 x 之值很容易計算，所以當要找出二元一次方程式的 2 組解時，我們會先考慮分別找出此二元一次方程式與 x 軸及 y 軸的交點，最方便我們畫圖，如圖中的 $(0, 3)$ 及 $(6, 0)$ 。



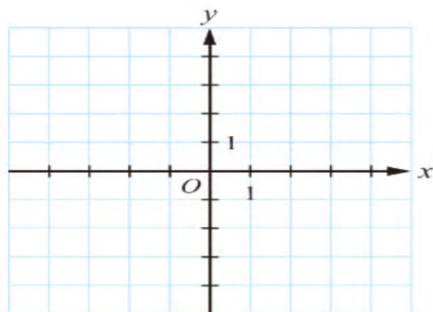
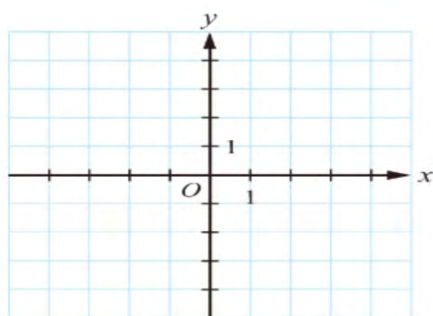
練習 1

任意找出二元一次方程式 $2x-y=2$ 的二組解，畫出 $2x-y=2$ 的圖形。

x		
y		

如果有學生說：只要 1 顆棋子即可，此時可讓學生上台有說明他所看到的直線方向，以澄清他的想法。

老師可問學生在一個二元一次方程式中有沒有最容易算出的兩個解？同學們認為如何找最簡單？

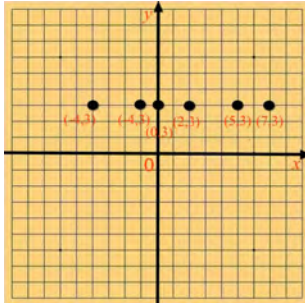
教學活動流程設計	教學注意事項						
<div></div> <div>練習 2</div> <div>任意找出二元一次方程式 $2x+3y=1$ 的二組解，畫出 $2x+3y=1$ 的圖形。</div> <div><table><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td></tr></table></div> <div></div>	x			y			
x							
y							

主題 IV：畫出 $y = c$ 的圖形 (水平線)； $x = c$ 的圖形 (鉛垂線)

教學活動流程設計	教學注意事項
<div>第 4 節</div> <div>活動 1</div> <div><div><div>(-1,3)</div><div>(0,3)</div><div>(-4,3)</div><div>(5,3)</div><div>(2,3)</div><div>(-7,3)</div></div><p>二人一組，將上面的答案卡洗勻牌面朝下，由學生輪流翻牌，當翻出 (-1,3) 這張牌時，因為 (-1,3) 代表 $x=-1$，$y=3$ 的點，此時學生要在擺一顆棋子至圍棋棋盤對應的位置上，一人持黑子、一人持白子，依序在棋盤內擺好這 6 個棋子。</p></div>	<p>此處本模組只設計 6 個棋子，教師亦可設計更多棋子，有的棋子不是 (●,3) 的型式，讓學生排除不可能是水平線的棋子。</p>

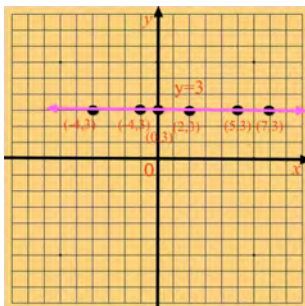
教學活動流程設計

教學注意事項



教師提問 1

- (1) 請問這 6 個點在一條直線上嗎？你覺得這條直線該如何表示，為什麼？



學生回答

都在同一條直線上。

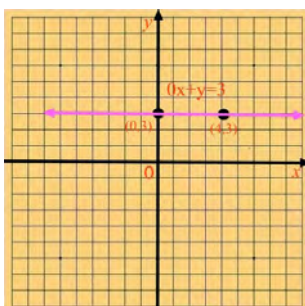
因為 y 坐標的值都是 3，所以這條直線是 $y=3$ 。

教師說明

我們可以來驗證看看，如果我們將 $y=3$ 看成是二元一次方程式 $0x+y=3$ ，畫出 $0x+y=3$ 的圖形。

描點與畫圖如下：

x	0	4
y	3	3



擺完棋子讓學生討論如何為這條直線命名是重要的事，若學生沒有答出 $y=3$ 教師可問學生那他會如何命名？

教學活動流程設計

教學注意事項

教師提問 2

(2) 接續上面的活動，請同學換上另一組牌卡如下：

(-4,0)

(-4,-5)

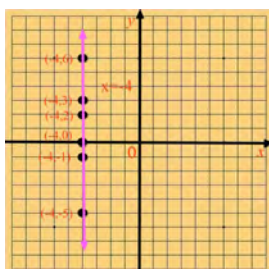
(-4,3)

(-4,2)

(-4,-1)

(-4,6)

重覆以上的過程，請問這 6 個點在一條直線上嗎？你覺得這條直線該如何表示，為什麼？



學生回答

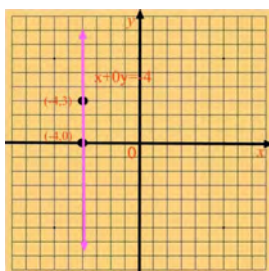
都在同一條直線上。

因為 x 坐標的值都是 -4 ，所以這條直線是 $x = -4$ 。

教師說明：我們再次進行驗證，如果我們將 $x = -4$ ，看成是二元一次方程式 $x + 0y = -4$ ，畫出 $x + 0y = -4$ 的圖形的圖形。

描點與畫圖如下：

x	-4	-4
y	0	3



觀察到的結論


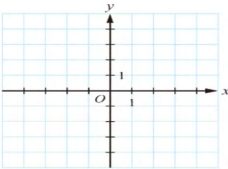

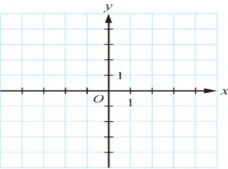

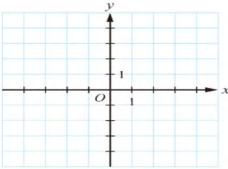

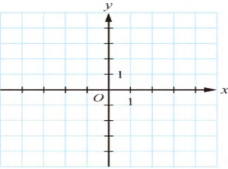
- (1) 圖形是水平線，其方程式為 $y = c$ ；圖形是鉛垂線其方程式為 $x = c$
- (2) 二元一次方程式 $y = c$ 的圖形是與 y 軸垂直於 $(0, c)$ 的直線；

二元一次方程式 $x = c$ 的圖形是與 x 軸垂直於 $(c, 0)$ 的直線。

此處本模組只設計 6 個棋子，教師亦可設計更多棋子，有的棋子不是 $(-4, \bullet)$ 的型式，讓學生排除不可能是鉛垂線的棋子。

和命名 $y = 3$ （水平線）相同，如果學生沒有回答 $x = 4$ 教師可問學生會如何命名？再回二元一次方程式的記法。

這個結論建議由老師請先請同學自行歸納、討論，最後再得出這個結論。

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>練習 1</p> <p>在坐標平面上，畫出下列二元一次方程式的圖形</p> <p>(1) $x = 2$ (2) $y = -3$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">   </div> <div style="text-align: center;">   </div> </div> <p>(3) $2x + 3 = 0$ (4) $2y - 1 = 3$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">   </div> <div style="text-align: center;">   </div> </div>	

主題 V：畫出二元一次聯立方程式的圖形，並認識解的位置

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>第 5 節</p> <p>教師說明</p> <p>二元一次聯立方程式代表它有兩個二元一次方程式，因此它們可以分別畫出兩條直線，這兩條直線可能有交點，也可能沒有交點，本課程中我們只討論兩條直線會產生一個交點的情形。</p> <p>教師提問 1</p> <p>請問同學，是否能在直角坐標平面上畫出 $x - y = 1$ 與 $2x + y = 5$ 的圖形呢？</p> <p>學生回答</p> <p>(1) 先畫出 $x - y = 1$ 的圖形</p> <p>要畫出 $x - y = 1$ 的圖形得先求出 $x - y = 1$ 的兩組解，再將數對畫在直角坐標平面上。</p>	<p>在本模組中，並不要求學生由圖形的交點去找出此交點的坐標，雖然在模組設計的題目是恰好交於 (2,1) 的狀況，但是學生實際在操作的過程中，可能會出現因畫圖的誤差而在圖形上偏離 (2,1) 的情形，因此我們只要讓學生有往某個數字靠近的感覺即可。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項																																
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>-1</td><td>0</td></tr></table> <p>(2) 再畫出 $2x+y=5$ 的圖形</p> <p>要畫出 $2x+y=5$ 的圖形得先求出 $2x+y=5$ 的兩組解，再將數對畫在直角坐標平面上</p> <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2.5</td></tr><tr><td>y</td><td>5</td><td>0</td></tr></table> <p>教師提問 2</p> <p>$x-y=1$ 及 $2x+y=5$ 的圖形在坐標平面上會產生交點嗎？</p> <p>學生回答</p> <p>會，有一個交點。</p> <p>教師提問 3</p> <p>同學們可以看出交點的 x 坐標與 y 坐標是多少嗎？</p> <p>學生回答</p> <p>兩條直線的交點好像是在坐標 (2,1)，但不確定是不是一定正確。</p> <p>教師提問 4</p> <p>同學們可以回憶我們在第 1 節課的操作，先找出很多個符合 $x-y=1$ 的解，一樣地找出很多個符合 $2x+y=5$ 的解，觀察這兩個二元一次方程式的解會不會往某個特定的數值靠近？</p> <div></div> <p>學生回答</p> <p>$x-y=1$</p> <table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td><td>2.5</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>0.5</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr></table> <p>往 1 靠近發現到 x 的值一直變大，而 y 的值也是一直變大。</p>	x	0	1	y	-1	0	x	0	2.5	y	5	0	x	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4		y	-2	-1	0	0.5	1	1.5	2	3		<p>如果學生對於畫二元一次方程式的圖形仍有困難，教師可引導學生回到圍棋棋子擺放，讓學生能順利畫出二條二元一次方程式的圖形。</p> <p>這裡我們強調以提問的方式讓學生判斷是否會有交點，然後讓學生動手分別描點來看出往交點一直往 (2,1) 靠近。</p> <p>為了看出坐標變化的情形，可建議學生固定某一坐標，如 x 坐標都相同，觀察兩條直線上點的 y 坐標有什麼變化。</p> <p>「二元一次聯立方程式圖形的交點為其聯立方程式的解」，這個概念可以由學生的臆測開始。</p>
x	0	1																															
y	-1	0																															
x	0	2.5																															
y	5	0																															
x	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4																									
y	-2	-1	0	0.5	1	1.5	2	3																									

教學活動流程設計	教學注意事項																				
<div>$2x+y=5$</div> <table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td><td>2.5</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-3</td><td></td></tr></table> <p>往 1 靠近發現到 x 的值一直變大，但 y 的值卻一直變小， 兩個二元一次方程式的解，似乎都往 $x=2, y=1$ 靠近。</p> <p>觀察到的結論</p> <p>因為 $x=2, y=1$ 是 $x-y=1$ 的一個解，所以 $(2,1)$ 在 $x-y=1$ 的圖形上；而 $x=2, y=1$ 也是 $2x+y=5$ 的一個解， 所以 $(2,1)$ 也在 $2x+y=5$ 的圖形上，所以交點是 $(2,1)$。</p>	x	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4		y	7	5	3	2	1	0	-1	-3		
x	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4													
y	7	5	3	2	1	0	-1	-3													

主題 VI：二元一次聯立方程式圖形的交點為其聯立方程式的解

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>第 6 節</p> <p>教師提問 1</p> <p>因為 $(2,1)$ 是 $x-y=1$ 及 $2x+y=5$ 兩直線在坐標平面的交點坐標，同學想想看，$x=2, y=1$ 會不會也是為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 的解呢？</p> <p>學生回答</p> <p>可以利用加消去法來求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 的解。</p> $\begin{cases} x-y=1 \dots (1) \\ 2x+y=5 \dots (2) \end{cases}$ <p>由 $(1)+(2)$ 得 $3x=6, x=2$ 將 $x=2$ 代入 (1) 得 $2-y=1, y=1$</p> <p>由上可得 $x-y=1$ 及 $2x+y=5$ 兩直線在坐標平面的交點坐標 $(2,1)$</p> <p>也是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 的解</p> <p>結論</p> <p>二元一次聯立方程式圖形交點，也是二元一次聯立方程式的解。</p>	<p>在第五節課採用的是觀察的方式，讓學生感覺兩個二元一次方程式的解往 $x=2, y=1$ 靠近，所以才能順著引出提問。</p>

教學活動流程設計

教學注意事項

教師說明

有了以上的結論，往後同學如想畫二元一次聯立方程式的圖形，可以先找出這個二元一次聯立方程式的解，再分別找出每個二元一次聯立方程式的另一解（例如，讓 $x=1$ 求 $y=?$ 或是讓 $y=0$ ，求 $x=?$ ），利用二元一次聯立方程式的二組解，就能很方便且快速地畫出二元一次聯立方程式的圖形。

範例

在坐標平面上畫出二元一次方程式 $x+2y=1$ ， $x-2y=5$ 的圖形。

說明

先求出 $x+2y=1$ ， $x-2y=5$ 的解

$$\begin{cases} x+2y=1 & \dots\dots(1) \\ x-2y=5 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

由 (1)+(2) 得 $2x=6$ ， $x=3$ 將 $x=3$ 代入 (1)

得 $3x+2y=1$ ， $y=-1$

所以 $x=3$ 、 $y=-1$ 是二元一次方程式

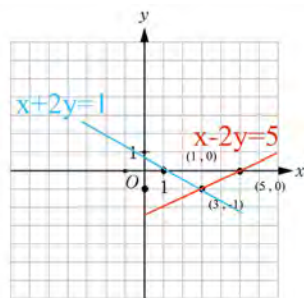
$x+2y=1$ ， $x-2y=5$ 的解

$$x+2y=1$$

x	3	1
y	-1	0

$$x-2y=5$$

x	3	5
y	-1	0



練習 1

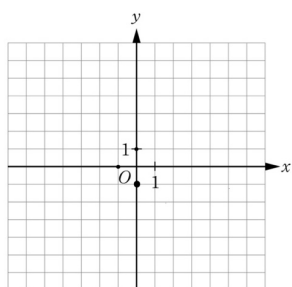
在坐標平面上畫出二元一次方程式 $3x=6$ ， $x-2y=4$ 的圖形

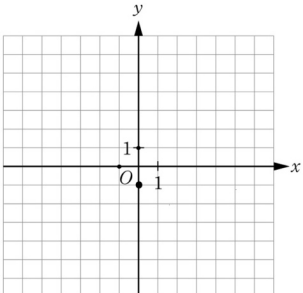
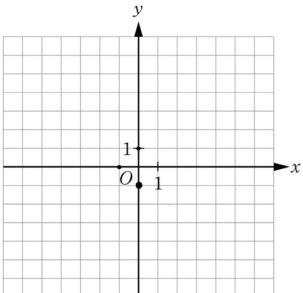
$$3x=6$$

x		
y		

$$x-2y=4$$

x		
y		



教學活動流程設計	教學注意事項																
<p>練習 2</p> <p>在坐標平面上，畫出二元一次方程式 $y = -1$，$x + 2y = -3$ 的圖形</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> $y = -1$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 5px;">x</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">y</td><td style="width: 20px;"></td></tr> </table> </div> <div style="margin-right: 20px;"> $x + 2y = -3$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 5px;">x</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">y</td><td style="width: 20px;"></td></tr> </table> </div> <div>  </div> </div> <p>練習 3</p> <p>在坐標平面上畫出二元一次方程式 $2x - y = -1$，$x + 2y = -3$ 的圖形</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> $2x - y = -1$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 5px;">x</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">y</td><td style="width: 20px;"></td></tr> </table> </div> <div style="margin-right: 20px;"> $x + 2y = -3$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 5px;">x</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">y</td><td style="width: 20px;"></td></tr> </table> </div> <div>  </div> </div>	x		y		x		y		x		y		x		y		
x																	
y																	
x																	
y																	
x																	
y																	
x																	
y																	
<p style="text-align: center;">附件</p>	<ul style="list-style-type: none"> · 附件 1~3：自編學習單。 · 附件 4：前測卷。 · 附件 5：後測卷。 · 附件 6：二元一次方程式的牌卡（有方程式、方程式的解與數對）。 · 附件 7：圍棋棋盤與黑白棋子若干個。 · 附件 8：直角坐標。 · 附件 9：絕地逢生的地圖。 																



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

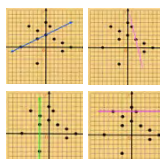
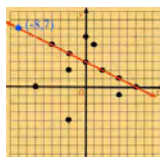

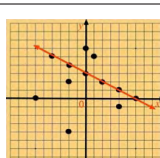
評量工具



本補強課程模組所使用的評量工具包含有：

- (一) 理解學生概念學習狀況的課堂口頭提問。
- (二) 分析學生學習前、後學習效果的前、後測。
- (三) 測驗學生主題單元概念的運算熟悉程度的附件：學習單。

一、口頭提問

提問位置 主題 - 節 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 I-1~2-1	同學們如何確定這個牌卡上所寫的是 x 、 y 之值是否為 $x+2y=6$ 的解？	學習單一附件 6 牌卡
主題 II-1~2-1	請同學指出 $x+2y=6$ 的解所形成的圖形在哪裡？	學習單一圍棋棋盤與黑白子若干
主題 II-1~2-2	為什麼不是以下圖形其中之一呢？	
主題 II-1~2-3	同學們是否發現這條連線上面，好像還有其他的點坐標，例如 $(-8,7)$ ，這些點坐標跟 $x+2y=6$ 有什麼關聯呢？	
主題 II-1~2-4	從 P 城設計一條攻擊路線，要能最快速到達 Y 城，若透過 P 城與 Y 城的坐標求得這條攻擊路線的二元一次方程式為 $3x-4y=-5$ ，學校的坐標是 $(2, 3)$ ，這條攻擊路線是不是會通過學校呢？	
主題 III-3-1	在之前的練習中，我們已找出 6 組 $x+2y=6$ 的解，且瞭解這 6 組解寫成數對後，都會在 $x+2y=6$ 的圖形上，如果我們將中間幾個棋子拿掉，是不是仍然可以看出此二元一次方程式 $x+2y=6$ 的圖形呢？ 我們知 $x+2y=6$ 在坐標平面的 6 組解就是圍棋上看到的 6 個黑棋，拿掉這 6 個黑棋的其中 1 個棋子，這條直線的方向會不會改變？	
主題 III-3-2	如果拿掉 2 個黑棋，這條直線的方向會不會改變？	

提問位置 主題 - 節 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 III-3-3	請問目前有 6 個黑棋，最多只能拿掉幾個黑棋，才能確保這條直線的方向才不會改變？	
主題 III-3-4	為什麼只能拿 4 個黑棋，不能拿走 5 個黑棋呢？	
主題 III-3-5	所以最少要保留幾個黑棋，才能保持這條直線的方向不變呢？	
主題 IV-4-1	請問這 6 個點在一條直線上嗎？你覺得這條直線該如何表示，為什麼？	學習單二 
主題 IV-4-2	重覆以上的過程，請問這 6 個點在一條直線上嗎？你覺得這條直線該如何表示，為什麼？	
主題 V-5-1	請問同學，是否能在直角坐標平面上畫出 $x-y=1$ 與 $2x+y=5$ 的圖形呢？	學習單三
主題 V-5-2	$x-y=1$ 及 $2x+y=5$ 的圖形在坐標平面上會產生交點嗎？	
主題 V-5-3	同學們可以看出交點的 x 坐標與 y 坐標是多少嗎？	
主題 V-5-4	同學們可以回憶我們在第 1 節課的操作，先找出很多個符合 $x-y=1$ 的解，一樣地找出很多個符合 $2x+y=5$ 的解，觀察這兩個二元一次方程式的解會不會往某個特定的數值靠近？	
主題 VI-6-1	因為 $(2,1)$ 是 $x-y=1$ 及 $2x+y=5$ 兩直線在坐標平面的交點坐標，同學想想看， $x=2$ 、 $y=1$ 會不會也是為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 的解呢？	

二、前測、後測

1. 前測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	(1) 任意找出二元一次方程式 $x - 2y = 0$ 的五組解，並將它們畫到坐標平面上。 (2) 任意找出二元一次方程式 $2x - y = 1$ 的二組解，並將它們畫到坐標平面上。 (3) 在坐標平面上，畫出下列二元一次方程式的圖形 (A) $x = 2$ (B) $y = -3$ (4) 在坐標平面上，分別畫出二元一次方程式 $x + 2y = -6$ ， $x - 3y = -1$ 的圖形	進行教學前
	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義	
第 2 大題	(1) 已知 $(1, 1)$ 在二元一次方程式 $ax + 3y = 9$ 上， $a = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) 已知二元一次方程式 $x + 5y = b$ 通過原點， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) 已知 $(c, 1)$ 在二元一次方程式 $x - 2y = 4$ 的圖形上， $c = \underline{\hspace{2cm}}$ (4) $(2, 1)$ 是為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + ay = 1 \\ bx + y = 3 \end{cases}$ 的解， $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$	
	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義	

2. 後測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	(1) 任意找出二元一次方程式 $2x + y = 0$ 的五組解，並將它們畫到坐標平面上。 (2) 任意找出二元一次方程式 $x - y = 3$ 的二組解，並將它們畫到坐標平面上。 (3) 在坐標平面上，畫出下列二元一次方程式的圖形 (A) $x = -4$ (B) $y = 5$ (4) 在坐標平面上，分別畫出二元一次方程式 $2x + y = 1$ ， $x - y = -4$ 的圖形	第 2 節結束後 第 3 節結束後 第 4 節結束後 第 6 節結束後
	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義	

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 2 大題	(1) 已知 $(2,0)$ 在二元一次方程式 $ax+2y=6$ 上， $a=$ _____ (2) 已知二元一次方程式 $2x-y+b=0$ 通過原點， $b=$ _____ (3) 已知 $(1,c)$ 在二元一次方程式 $x-3y=4$ 的圖形上， $c=$ _____ (4) $(2,1)$ 是為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+ay=1 \\ bx+y=3 \end{cases}$ 的解， $a=$ _____, $b=$ _____	第 2 節結束後
	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義	

教學反思 應用建議



本補強課程模組主題為「二元一次聯立方程式的幾何意義」，許多同學接觸了二元一次方程式，學習以符號代替未知數，學會列式，甚至學習聯立方程式，當他們將方程式的解轉換成數對放在直角坐標平面上後，就開始會點混亂了，因為它是學生由代數表徵轉化到幾何表徵的一個重點關鍵，而本主題對於學生後續國二的一次函數與國三的二次函數圖形，甚至是高中的三次函數圖形的學習都有很深的影響，因此幫助同學打好基礎更顯重要。本補強課程模組選擇台南市某國中進行模組的試行，參與課程的九位學生三年級學生對於二元一次聯立方程式的幾何意義上課前都不甚理想。此次的補強課程模組明顯地能協助同學掌握二元一次方程式的幾何意義，更期待對學生後續相關單元的學習也有所助益。

一、學生表現

(一) 前測成績表現

內容/ 學生	二元一次方程式的圖形										二元一次方程式的解					正確率%
	題 1		題 2		題 3(A)		題 3(B)		題 4		題 1	題 2	題 3	題 4		
	列表	畫圖	列表	畫圖	列表	畫圖	列表	畫圖	列表	畫圖	a	b	c	a	b	
學生 1	○	×	○	×	×	×	×	×	○	×	○	○	○	○	×	47%
學生 2	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×	○	×	×	20%
學生 3	×	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	7%
學生 4	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	○	○	○	×	×	47%
學生 5	×	×	×	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	7%
學生 6	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	33%
學生 7	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	○	○	○	○	○	73%
學生 8	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	13%
學生 9	○	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×	20%
正確率%	78%	44%	56%	33%	33%	11%	11%	0%	11%	0%	44%	33%	44%	33%	11%	

(二) 後測成績表現

內容/ 學生	二元一次方程式的圖形										二元一次方程式的解					正確率%
	題 1		題 2		題 3(A)		題 3(B)		題 4		題 1	題 2	題 3	題 4		
	列表	畫圖	列表	畫圖	列表	畫圖	列表	畫圖	列表	畫圖	a	b	c	a	b	
學生 1	×	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	87%
學生 2	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	80%
學生 3	×	×	×	×	○	○	○	○	○	×	○	○	×	×	×	47%
學生 4	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	100%
學生 5	○	○	○	○	×	×	○	○	×	×	×	○	×	×	×	47%
學生 6	○	○	○	○	×	×	○	○	×	×	○	×	×	×	×	47%
學生 7	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	○	○	○	○	87%
學生 8	○	○	○	○	×	×	×	×	○	×	×	×	○	○	○	53%
學生 9	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	○	×	97%
正確率%	78%	78%	89%	89%	67%	67%	89%	89%	78%	44%	78%	78%	44%	56%	44%	

(三) 學生前、後測結果比較分析

1. 「二元一次方程式的解」部分，前 3 題是已知某一特定的點在方程式上，如已知 (2,0) 在二元一次方程式 $ax+2y=6$ 上，求 $a=?$ 第 4 題是已知聯立方程式的解，求此聯立方程式中係數之值，如 (2,1) 是為二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} x+ay=1 \\ bx+y=3 \end{cases}, \text{求 } a=?, b=?$$

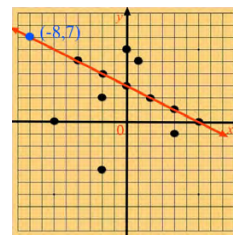
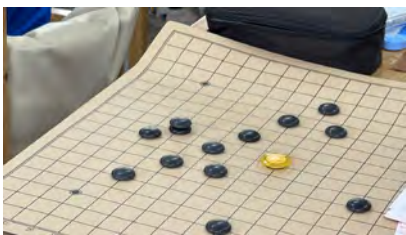
此 4 題學生前測平均答對率與後測的平均答對率比較，均有明顯的進步，顯示藉由此模組的實施能讓學生更理解二元一次方程式解的的意義。

2. 「二元一次方程式的圖形」部分，由前測成績可看出，學生對於列出二元一次方程式的解，掌握度不高，答對率由 78%、降至 56%、最差的答對率只有 11%。而要把方程式的解轉換成數對，畫到直角坐標平面上更顯困難，其中畫出水平線、鉛直線的圖形方面，9 人中只有 1 人答對；而畫二元一次聯立方程式的圖形，竟無人答對。經過模組的教學，在後測部份：每一題的列表，除題 3(A) 正確率為 67% 外，其他題目的正確率均接近 8 成，題 3(B) 的正確率更接近 9 成。在畫二元一次方程式圖形的部份，每一個類型的答對率也有不少的提升，例如，畫 $y=c$ 部份，由無人答對，進步至 9 人有 8 人答對，表示透過圍棋棋子的擺放讓學生對於二元一次方程式的圖形產生連結而有感。
3. 在畫二元一次聯立方程式的圖形答對率由原本的 0%，進步至 44%，表示同學對畫二元一次聯立方程式的圖形已有多一些的瞭解與掌握。
4. 由 (1,c) 在二元一次方程式 $x-3y=4$ 的圖形上 $c=$ ____，這個題目的前後測可看出同，同學對於在方程式的圖形上就是它的解，概念仍需加強，也更可能是觀念已建立但是在計算一元一次方程式產生錯誤，這都是教學在進行模組教學時可留意的地方。

二、教學情形

(一)「瞭解二元一次方程式圖形的意義並畫出二元一次方程式的圖形」部份

1. 在第 1 節課利用黑白子在圍棋棋盤上擺出其正確的位置，在試行模組就發現一個有趣的狀況，因為棋盤上並沒有坐標軸也沒有原點，所以同學都會一直請問教師原點在哪些的疑問，後來教師直接告訴同學在棋盤正中央（也就是圍棋天元的位置），並請同學放一個磁鐵來代表原點，兩軸的方向是往右與往上。這裡我們也建議教師可以讓學生自己決定原點的位置，隨著活動的進行，同學也會感受到直角坐標對我們放置棋子或在紙上描點的影響。
2. 其次學習單一，我們會讓學生練習找到二元一次方程式的數個解，並畫到坐標平面上，學生會出現找到有分數或小數的坐標，就會反應無法畫在方格紙上，這也是教師可以提醒學生關於如何調整坐標平面兩軸單位長度的時機。
3. 利用「圍棋棋子」代表二元一次方程式的解，擺放在棋盤上，因為我們透過黑、白子的約定（例如是二元一次方程式的解用黑子，不是二元一次方程式的解用白子），不但可確認學生對於直角坐標概念是否清楚，也因為是學生自行擺放棋子，更可使學生感受「二元一次方程式的圖形為直線」、「是二元一次方程式的解的棋子才會在這條直線上」、「不是二元一次方程式的解的棋子不會在這條直線上」、「兩點可畫出一條直線」，這些內容上會相當直觀且有感。此外，正因為棋盤的格子數是有限的，所以很容易可以引入「如果有一點並沒有畫出來在這條直線上，但是好像是在直線上，會是此二元一次方程的解嗎？」這個重要的觀念，例如以下的提問「同學們是否發現這條連線上面，好像還有其他的點坐標，例如 $(-8,7)$ ，這些點坐標跟 $x+2y=6$ 有什麼關聯呢？」



4. 在畫出水平線與鉛直線的單元，先是抽牌卡，再依照上面的坐標，將黑子或白子放到棋盤上，雖然設計是分組兩人分別抽卡，也可以改成一人先排水平線的坐標，另一人排鉛直線的坐標的方式；此外，考慮棋盤大小與教師製作教具的負荷，分別只設計 6 個坐標，教師亦可設計更多棋子，有的棋子不是 $(\bullet, 3)$ 的型式，讓學生排除不可能是水平線的棋子，以及亦可設計更多棋子，有的棋子不是 $(-4, \bullet)$ 的型式，讓學生排除不可能是鉛垂線的棋子。

(二)「瞭解二元一次聯立方程式的幾何意義並畫出二元一次聯立方程式的圖形」部份

1. 有前 4 節的奠定基礎，同學進入在畫出二元一次聯立方程式的圖形並不會太困難，本模組將重點放在提醒學生並以提問的方式讓學生判斷二個二元一次方程式是否會有交點，讓學生動手分別描點來看出往交點一直往某個坐標靠近。為了看出坐標變化的情形，可建議學生固定某一坐標，如 x 坐標都相同，觀察兩條直線上點的 y 坐標有什麼變化。

例如，畫 $x-y=1$ 及 $2x+y=5$ 的圖形時，

$$x-y=1$$

x	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4	
y	-2	-1	0	0.5	1	1.5	2	3	往 1 靠近

發現到 x 的值一直變大，而 y 的值也是一直變大。

$$2x+y=5$$

x	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4	
y	7	5	3	2	1	0	-1	-3	往 1 靠近

發現到 x 的值一直變大，但 y 的值卻一直變小，

兩個二元一次方程式的解，似乎都往 $x=2, y=1$ 靠近。

在此處，我們是以列表方式處理，教師也可利用 GeoGebra 或 Desmos 等有繪圖功能資訊工具，讓學生進行觀察兩個二元一次方程式，它們個別解的位置都有往某個位置移動的現象。

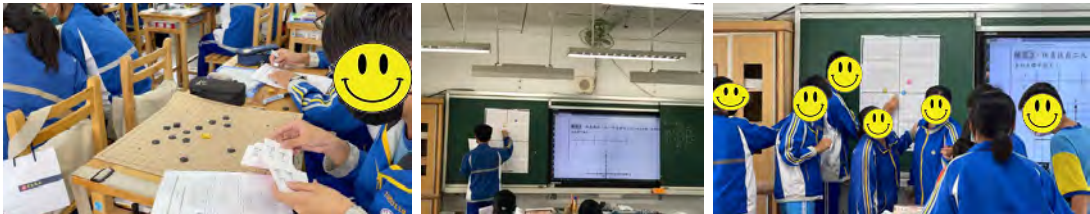
2. 二元一次聯立方程式圖形的交點為其聯立方程式的解，這是解題時常用的觀念，當有兩個二元一次方程式解會往某個特定數值移動的概念後，我們再來強調二元一次聯立方程式圖形的交點，轉換成解的型式，會不會讓二個方程式成立？

三、教學反思

(一) 依據學生學習情形進行滾動調整

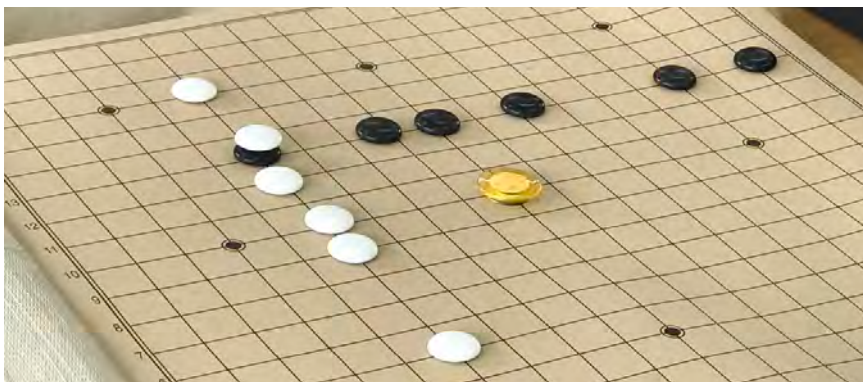
本補強課程模組是以學生的生活經驗—絕地求生 (PUBG)，也就是常見的「吃雞」遊戲的地圖引入，在試行的過程中，學生對於這個切入點反應熱烈，反而是授課教師不太瞭解這個遊戲，於是師生間進行了一些對話，但也可能遇到學生對於這個切入點沒什麼感覺，因此建議教師可以視學生的反應，做一些調整。

其次，課程中透過簡單的牌卡與圍棋棋盤與黑白棋子的操作，在分組操作的過程中，也會有小組間的兩人都在狀況外的情形，所以試行時教師立刻調整，請各組派一人來黑板上，利用磁鐵擺出題目要求的點坐標，如此可以讓這些尚未進入學習狀況的同學有更多學習的機會。



(二) 重視每一個學生的學習回應

在利用圍棋擺放的過程中，因為同學操作上的問題，出現了黑白子重疊的狀況，這時正好可利用這個突發狀況，和同學討論為什麼會這樣？哪裡出現問題，以這個例子來說，教師正好可用來複習點坐標的表示法 (x,y) ，前面的 x 代表從原點來思考左右方向的格子數，後面的 y 則是以原點來考慮上下方向的格子數，同學在記錄上就會更加正確。

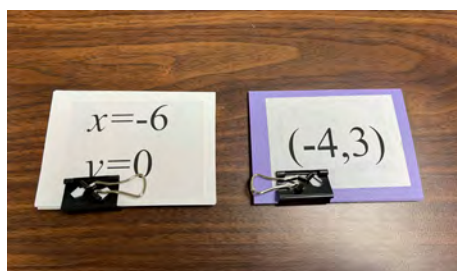
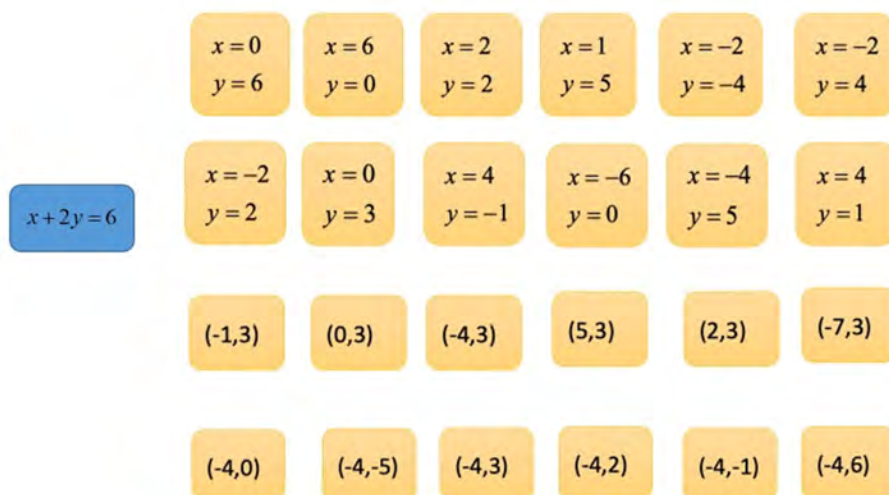


(三) 多元教學策略增進成效

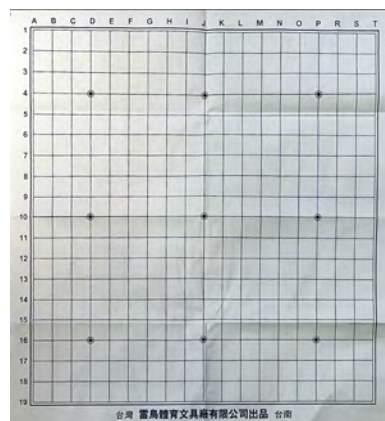
在試行的過程中，教師也給予很多有效的回饋，其中有提到除了利用圍棋擺放，讓同學有實體視覺的效果與動手操作的記錄外，善用多元的教學策略，如 GeoGebra 或 Desmos 等網路繪圖工具，不但可克服棋盤不易放置 x,y 坐標含有分數或小數的點的困擾，對於有不同係數的二元一次方程式也可以很方便的將圖形放在一起進行比較，因此教師在利用本模組進行教學時，也可適時加入這些多元的教學策略，讓同學有不同面向的學習。

四、教學建議

- (一) 教案中的圍棋棋盤、黑白棋子，亦可更換成方格紙、磁鐵或以數位方式在電子白板、個人白板予以代替，但實際教學時，學生透過自己將黑子與白子在棋盤上進行擺放，尤其是對於某一坐標是否為該直線上的解，在顏色上黑、白的轉換，會讓學生對直線的解與是否在直線上有深刻的感覺與印象。
- (二) 學習單中的題目卡與答案卡，為了方便教師在教學時靈活反覆運用，也可作成 $\bigcirc x + \bigcirc y = \bigcirc$ ，其中 \bigcirc 為空白，然後將卡片進行護貝，再以白板筆將數字寫上去，要改題目數字時比較方便，就可不必重覆製作教具。



- (三) 圍棋棋盤若不方便準備，建議老師可在網路上找到棋盤的圖形或自行繪製，將棋盤進行大圖輸出，印在紙上以方便攜帶。



參考文獻

- 李憶琴 (2007)。國中三年級學生二元一次方程式解題策略及錯誤類型之研究。國立中山大學教育研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 李佩珊 (2007)。「二元一次方程式的圖形」網路補救教學之個案研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄市。
- 游鯉謙 (2004)。台中地區國二學生在坐標平面單元錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄市。
- 蕭中璽 (2014)。二元一次方程式圖形補救教學之研究。國立嘉義大學數理教育研究所碩士論文，未出版，嘉義縣。
- 戴文賓、邱守榕 (2000)。國一學生由算術領域轉入代數領呈現的表現與特徵。科學教育，**10**，148-175。
- 簡銘賢 (2013)。高雄地區國三學生二元一次方程式單元錯誤類型分析 - 以中低學習成就學生為例。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄市。

國中數學領域 補強課程模組 5

七年級

比例式與正反比

- 臺中市立溪南國民中學 張廷吉組長
- 臺中市立五權國民中學 莊佶達教師

設計 理念



我國著名的數學經典書籍《九章算術》中的第二章即有「粟米中的今有術」，具備完整的比例算法。美國數學教師學會 (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) 在 1989 年「學校數學課程與評鑑標準」中關於數量的說明，清楚地提到「比」的概念需要經由日常生活中漸進式討論而得。美國數學教師協會 (National Council of Teacher Mathematics, NCTM) 於 2000 年出版的「學校數學的原則與標準」，指出學生在學習方面應該用理解的方式學習數學；有效的數學教學必須了解學生知道了什麼和需要學習什麼 (引自鍾靜、許馨月、翁嘉聲，2001)。孫霞繡、許桂敏 (1990) 調查國民的數學基本素養，從國內的報章雜誌中出現的數學知識做調查，發現比例出現次數排名第七名 (引自郭慧玲，2003)。綜上所述，比例概念和日常生活息息相關，更可見學習的重要性。

綜觀國內外的數學課程，比的概念與學習列為國小、國中重要學習內容之一。學生在國一階段正處於算術思維到代數思維的過渡期，樣式是作為此一階段學習活動的主要素材，以培養學生辨識數量樣式的能力，發現樣式之間的關係，進一步發展說理的能力。而在每年的診斷評量中，學生在學習表現 n-IV-4(理解比、比例式、正比、反比和連比的意義和推理，並能運用到日常生活的情境解決問題) 錯誤率很高，其中學生容易產生的迷思概念有四種，一是「已知 $2a = 3b$ ，則 $a : 3 = b : 2$ 」，學生可能有「 $a : 2 = b : 3$ 」的迷思概念；二是在 y 和 x 成正比的关系式 $y = kx$ 中，學生可能有「 $k > 0$ 」的迷思概念；三是在應用問題的比例式中，學生可能有「等號兩邊前後項的對應關係位置擺錯」的迷思概念；四是學生可能有「若 x 增加， y 也隨之增加，則 y 必和 x 成

正比」或「若 x 增加， y 也隨之減少，則 y 必和 x 成反比」的迷思概念。

因此本補強課程希望透過生活中的實例、動手操作、圖像、情境、對話討論、符號等表徵，逐步說明為何要引入比例的概念，以及學習比的概念，避免直接進行抽象的規則操弄，或者流於規則的記憶而無法理解比的運算思維。

本模組設計想法是貼近生活，比出素養，跳出框架，計算得心應手，明正辨反，乘除即答。比是一種用利用許多項目來凸顯某個或某些概念的方法，例如利用時間與距離來呈現速率、利用長寬來描述矩形的形狀或面積；而這些現象基本上包括一個被描述的標的與一些用以描述標的之項目。這種把標的以及項目應列出來的「格式」就是比，當這些項目被賦予特定的數值後，這些數就描繪出標的特定樣貌。當兩個比例描繪出相同標的時，這兩個比例可以由等號連結而成比例式。我們可以用項目之間的倍數關係來呈現標的的形狀，這個時候，我們強調的是倍數關係，而非實際數值，我們會用「 \therefore 」的符號來強調項目間的倍數關係，這種倍數關係僅提供形狀資訊不含「真實大小」資訊。例如：它的長寬比為 $3:2$ 或 $6:4$ 或 $9:6$ ，如果要呈現真實的「大小樣貌」，則稱長寬各為 6 單位，4 單位或各為 9 單位，6 單位。當比的項目間以倍數關係呈現時，我們稱之為比例，並且我們改變比的格式為上下而非左右，例如長：寬 $=3:2$ 以及 $9:6$ 唸成「長與寬的比為 3 比 2 以及 9 比 6」，當兩個比例描繪出相同的標的形狀時，我們列出「等式」，等式格式為 $3:2 = 9:6$ 。這種兩個比例之間的等式稱之為比例式（如同方程式是兩個算式之間的等式一般）亦即透過「比例方程式」來解問題。我們常會有方程式口訣：內項相乘等於外項相乘，可是這個口訣在超過兩項的比例式又不適用，我們認為將比例式寫成上下對仗的方式較容易理解其間的關係。通常，我們會用某一項目為基準量來描述其它的項目，此時，就形成比值的概念。有時我們會運用項目比內的倍數關係或比間的倍數關係，用以描述標的概念，而且「變化」是成正比或反比。

因此教材設計以將日常生活情境融入教材，透過生活情境來討論比、比例式與比值（如早餐的熱量、包水餃的比例、哪一種飲料比較划算等）；透過對話討論讓學生明白比就是要先列出項目、探討項目間的倍數關係、比的虛與實概念、以基準量看比值等；進而運用積木的動手操作與圖像表徵來說明正反比的概念，最後運用符號表徵正反比的關係式。希望學生在生活情境中去觀察與探究項目與項目之間的數量關係，並試圖由倍數的關係寫下項目之間的數量關係，嘗試找出一個最佳的方法表徵所求的數量樣式，最後形成一個穩定的策略，並為後續學習函數單元奠立良好的基礎。

課程 架構

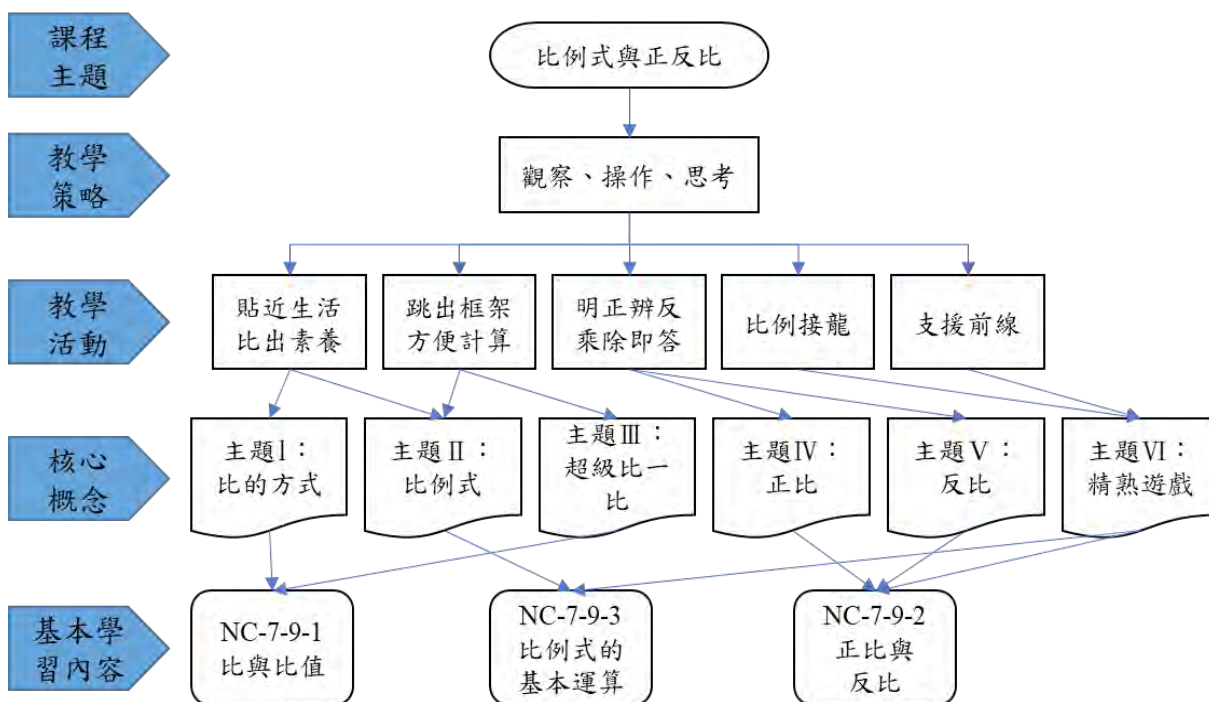
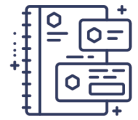


圖 1：課程架構圖

- (一) 主題 I (第 1 節課)：透過生活情境各式各樣的狀況來討論比，引起學生的討論，讓學生知道想凸顯的東西不一樣，比的方式就不同，釐清加減的比與乘除的比有何不同。進一步讓學生知道比是一種利用許多項目來凸顯某個或某些概念的方法，例如利用紅茶與冬瓜茶來呈現冬瓜紅茶的口味、利用總熱量與總重量來描述單位熱量；而這些現象基本上包括一個企圖想要凸顯的東西與一些用以這一個企圖凸顯的之項目。這種把企圖以及項目應列出來的「格式」就是比，當這些項目被賦予特定的數值後，這些數就描繪出企圖特定樣貌。
- (二) 主題 II (第 2 節課)：算算看活動，透過孩子都喜歡吃的「水餃」入題，讓學生從自己到家人，規劃自己的需求的水餃顆數，並推算出應該準備的餡料重量，並從餡料的重量推算出可以做出的顆數。藉由生活實例，詳細講解比重要的內容，並具體規劃出比例式中的每一個步驟，讓學生學習比例式從表格化的書寫，到寫成式子，並進一步探討比例式之間的關係有倍數與比值等兩種想法。

- (三) 主題 III (第 3 節課)：學生在遇到應用問題時，因為沒有耐心與閱讀習慣，常以一句「看不懂」，就放棄去閱讀題目，並且將看得到的數值，進行加減乘除後就認為是答案了。本節透過「我問你答」活動過程及比的表格化，引導學生知道為何需要比值，想比較兩種量之間的比率關係，從想要哪種包裝比較哪個便宜，探討該怎麼比較，在比便宜當中原本兩個量，先調整成其中一個量一樣，去比較另一個數值，鋪陳背後學習比值的歷程，以誰當基準，來看其他項。
- (四) 主題 IV (第 4 節課)：教師運用學生喜愛的飲料進行布題情境，引導學生利用表格記錄，發現正比的特徵是你變幾倍，我就跟著變幾倍。再透過「積木高手 1」動手操作活動，讓學生體驗長變變為原來的幾倍時，寬就會跟著變為原來的幾倍，進一步理解正比例主要特徵是什麼，正比的核心概念是相同倍數一起改變。透過引導與操作讓學生發現正比的核心概念，而不是老師直接宣告。
- (五) 主題 V (第 5 節課)：教師運用學生喜愛的水餃進行布題情境，引導學生利用表格記錄，發現反比的特徵是你變幾倍，我就跟著變你的倒數倍數。再透過「積木高手 2」動手操作活動，讓學生體驗長變變為原來的幾倍時，寬就會跟著變為原來的倒數倍數，進一步理解反比例主要特徵是什麼，反比的核心概念是倒數倍數一起改變。透過引導與操作讓學生發現反比的核心概念，而不是老師直接宣告。
- (六) 主題 VI (第 6 節課)：透過撲克牌「比例接龍」操作活動，讓學生再次複習比例式與最簡單整數比，希望能透過簡單有趣的活動取代紙筆的重複練習。透過「正反支援前線」操作活動，讓學生再次複習正比例與反例式的核心概念，希望能透過簡單有趣的活動取代紙筆的重複練習。

教材分析



(一) 本補強課程模組教材重要性

「比例」可說是最基本又有用的數量關係，是國小和國中交界時的數學重點，其應用散見於日常生活，也是後續數學和科學的學習基礎。因此國中學習比例，其中最重要的是要能認識哪些問題可用比與比例式來解決。常見的比例問題有：折扣、加成、利率、匯率、密度、濃度、速度、比例尺等。比例式概念形成後，在數學學習上，將能順利銜接函數與三角比，如何讓學生能有學習的動機，願意學習「比」的概念是非常重要的。本模組教材課程內涵與其他教材學習內容間的關係如圖 2。

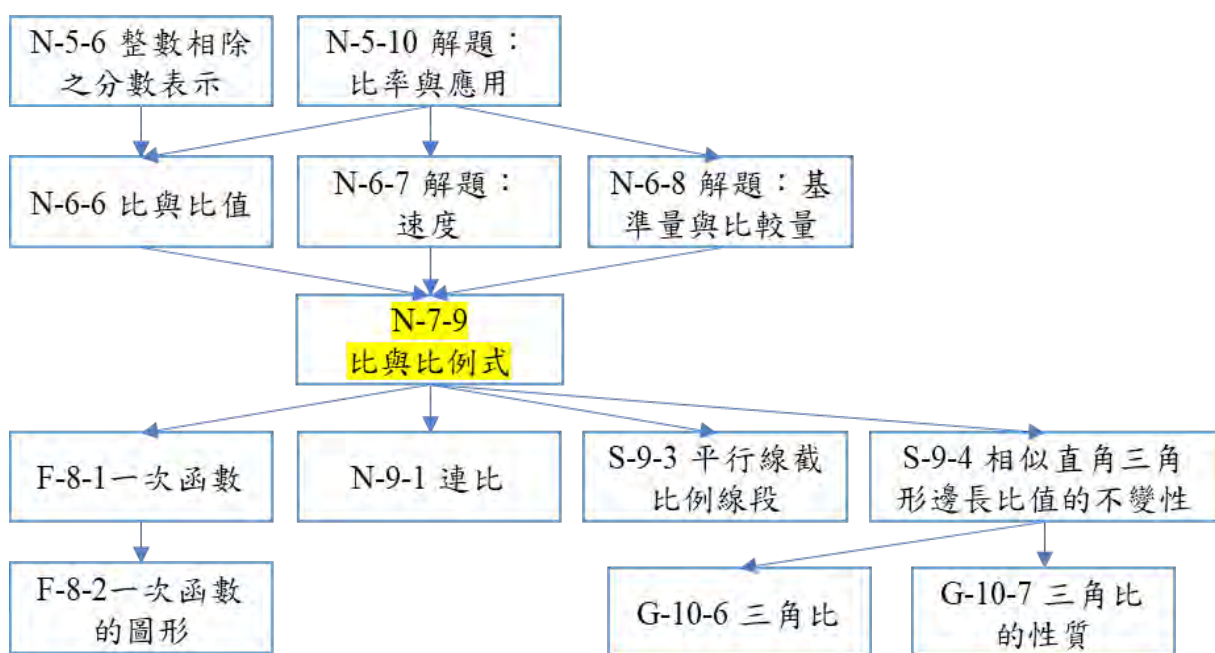


圖 2：課程內涵與其他學習內容間的關係

(二) 本補強課程模組教材學習內容分析

本補強課程模組教材學習內容，包括「比與比值」、「比例式的基本運算」、「正比與反比」，希望學生在生活情境中或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。本模組教材基本學習內容，如圖 3。

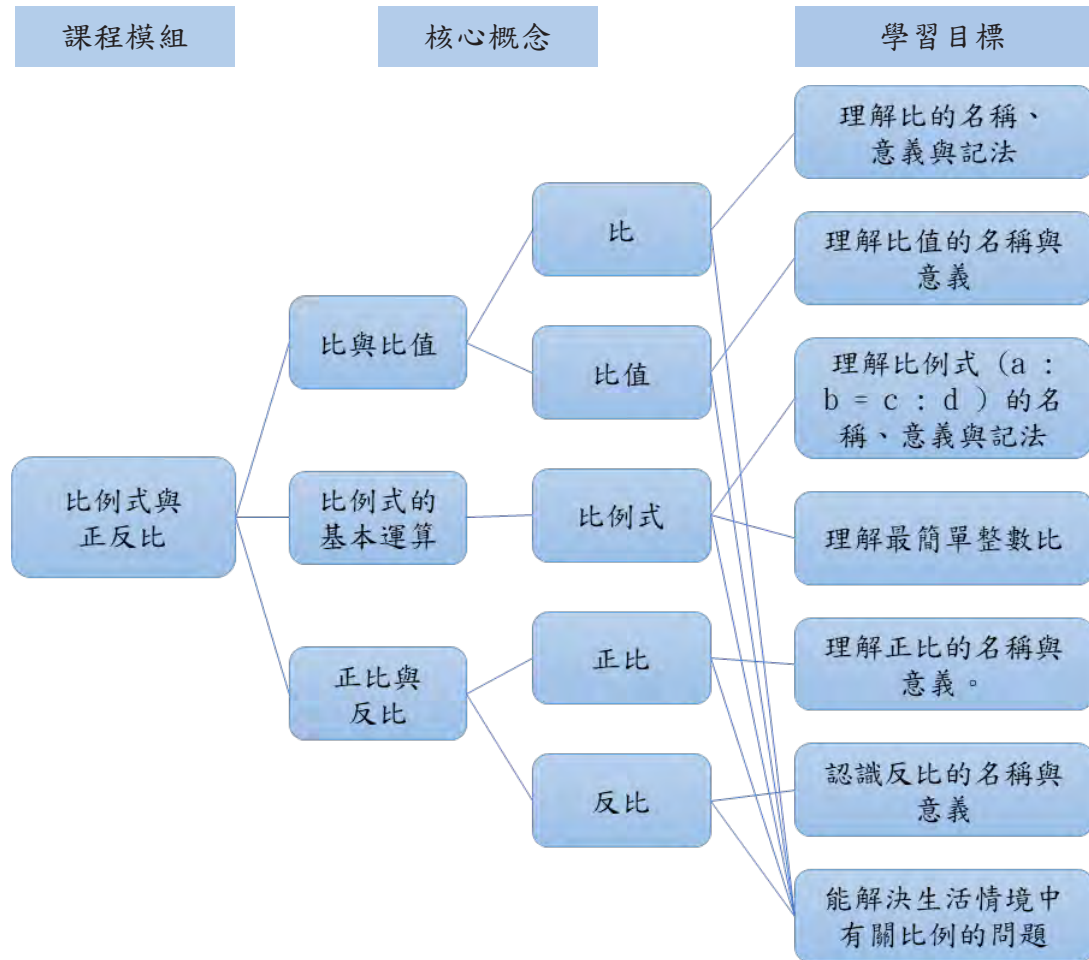


圖 3：課程內涵與其他學習內容間的關係

(三) 教材分析與課程架構的關係

本補強課程模組教材以「比例式與正反比」為主軸，希望能以我問你答的方式，帶出「比」的核心概念，利用表格化呈現比的關係，改變比的格式為上下而非左右，將比例式寫成上下對仗的方式較容易理解其間的關係。我們會用某一項目為基準量來描述其它的項目，此時，就形成比值的概念。有時我們會運用項目比內的倍數關係或比間的倍數關係，用以描述標的概念，而且「變化」是成正比或反比。本章節課程的

鋪陳盡量都用學生身旁的例子為起點，融入課本比的內容，讓學生感覺切入有感而不害怕。本補強課程教學過程中的教材內容與課程架構的關聯，如表 1。

表 1：本補強課程模組教材分析與課程架構教學關係

教材分析	課程架構		教學關聯
比的概念	貼近生活 比出素養	主題 I (第 1 節課)	透過生活情境各式各樣的狀況來討論比，引起學生的討論，讓學生知道想凸顯的東西不一樣，比的方式就不同，釐清加減的比與乘除的比有何不同。
比例式	跳出框架 方便計算	主題 II (第 2 節課)	藉由生活實例，詳細講解比重要的內容，並具體規劃出比例式中的每一個步驟，讓學生學習比例式從表格化的書寫，到寫成式子，並進一步探討比例式之間的關係有倍數與比值兩種想法。
比值	我問你答	主題 III (第 3 節課)	透過「我問你答」活動過程及比的表格化，引導學生知道為何需要比值，探討該怎麼比較，在比便宜當中原本兩個量，先調整成其中一個量一樣，去比較另一個數值，鋪陳背後學習比值的歷程，以誰當基準，來看其他項。
正比	明正辨反 乘除即答	主題 IV (第 4 節課)	運用日常生活情境融入教材，引導學生利用表格記錄，再透過「積木高手 1」動手操作活動，讓學生體驗正比的核心概念是相同倍數一起改變。
反比	明正辨反 乘除即答	主題 V (第 5 節課)	透過引導與操作讓學生發現反比的核心概念是倒數倍數一起改變，而不是老師直接宣告。
比例式與 正反比	比例接龍 支援前線	主題 VI (第 6 節課)	透過撲克牌「比例接龍」操作活動，讓學生熟練比例式與最簡單整數比；透過「正反支援前線」操作活動，讓學生熟練正比例與反例式的核心概念。

教學計畫



模組名稱	比例式與正反比
授課節數規劃	六～八節課
學習重點 (內容、概念、能力)	<p>學習內容</p> <p>N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。(不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之)。</p> <p>學習表現</p> <p>n-IV-4 理解比、比例式、正比、反比和連比的意義和推理，並能運用到日常生活的情境解決問題。</p> <p>基本學習內容</p> <p>NC-7-9-1 比與比值。</p> <p>NC-7-9-2 正比與反比。</p> <p>NC-7-9-3 比例式的基本運算。</p>
適用對象	<p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容</p> <p>N-5-6 整數相除之分數表示 從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。</p> <p>N-5-10 解題 比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。</p> <p>N-6-6 比與比值 異類量的比與同類量的比之比值的意義。能理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。</p> <p>N-6-7 解題 速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。</p> <p>N-6-8 解題 基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。</p>

教學連結建議	<ol style="list-style-type: none"> 銜接概念：線型函數、連比、平行線截比例線段、三角比 F-8-1 一次函數 F-8-2 一次函數的圖形 N-9-1 連比 S-9-3 平行線截比例線段 S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性 G-10-6 三角比 G-10-7 三角比的性質 跨學科應用：(略)。
學習目標	<ol style="list-style-type: none"> 能了解比的性質。 能熟悉比與倍數的關係。 能了解比值的意義，並熟練比值的求法。 能熟練比例式的基本運算。 能理解正比、反比關係的意義。
教學策略	<div data-bbox="486 985 1372 1176"> </div> <ol style="list-style-type: none"> 以「提問教學」配合「活動融入教學」的方式進行課程。 以「動手操作」配合「圖像與符號表徵」引入比例的概念。 以「遊戲教學」配合「圖像與操作表徵」強化學生的概念學習。
教學材料	<ol style="list-style-type: none"> 自編學習單 (附件 1)。 任務卡牌一套 (附件 4)。 撲克牌一副。 小正方體積木 (邊長約 2 公分) 每人 200 個。
教學資源	<ol style="list-style-type: none"> 科技化評量系統歷屆考古題。 康軒、翰林、南一教科書。 數學新世界生根計畫素養教材。 <div data-bbox="510 1780 662 1937"> </div> <ol style="list-style-type: none"> 學習扶助資源平臺之基本學習內容與教材。

主題一：比的方式（一節課）

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>1. 前情提要</p> <p>回顧學生國小學過的比，藉以了解起點行為。</p> <p>2. 引起動機</p> <p>要學生寫第一題，看圖片判斷哪一隊比較強。</p> <p>提問重點</p> <p>(1) 看一場比賽就知道哪一隊比較強嗎？</p> <p>(2) 比較強是只看分數嗎？</p> <p>還可以看些什麼？(打擊、投手、守備、運氣)</p> <p>(3) 要學生能夠說出，看哪一隊比較強的比較項目？學生寫第二題，看圖片判斷五個男生中，哪一個身材較好？</p> <p>提問重點</p> <p>(1) 看學生能否從第一題中學到，列出想比較的項目。</p> <p>(2) 看身材好是看一種感覺嗎？這樣不準確。</p> <p>要學生從感覺到比較數值。</p> <p>3. 概念說明</p> <p>(1) 學生寫第三題的第一個</p> <p>I. 能夠找到正確的重點。</p> <p>II. 在比的時候分為兩種一加減的比，和乘除的比。加減的比看得是差多少，乘除的比看得是之間的倍數。</p> <p>III. 老師可以多詢問學生生活中的事例。</p> <p>如差不多容量的飲料，甲店家賣 35 元乙店家 30 元，兩家店差多少？(兩家店適用哪一種比法) 差不多容量的冰淇淋，小美冰淇淋賣 25 元，哈根達茲賣 90 元，兩個廠牌差多少？(兩廠牌適用哪一種比法)</p> <p>(2) 學生看第三題的第二小題</p> <p>I. 要學生學習最簡單整數比的好處。</p> <p>II. 最簡單整數比的表示歷程，數值等比例從大到小、或從小到大等比例的過程，最簡單整數比的妙用。</p>	<p>讓學生能夠收心並融入學習情境。</p> <p>在學比的內容當中，多半的題目都在闡述計算能力的提升，但忽略讓孩子知道到底在比甚麼，第二題跟第三題的目的要讓學生知道並明瞭，講比較最重要要知道在比哪些項目。</p> <p>學生在國小時，有學過基準量與比較量，想要與基準量比較時，有兩種的形容方式，分別是差異與倍數，差異的數字較小，我們會用減法來算；相反的若差異比較大，將會使用除法來演算。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
4. 小試身手 (1) 學生書寫小試身手的題目。 (2) 老師檢討小試身手的題目。	為何要學習最簡整數比呢？是因為在面對放大時比較好演算，在面對漢堡的單位熱量高低做一個引，利用每一口吃下多少熱量，將 $150:240=5:8$ 。界以此鋪陳，讓學生能夠先將大數值的比，主動化簡成較小的比。
5. 回顧與總結	而在最後的小試身手當中，由中轉小再放大，會讓放大的倍數從分數到整數，對於學生來說較方便演算。

主題二：比例式（一節課）

教學活動流程設計	教學注意事項
1. 前情提要 回顧第一節課學生學過的課程。	學生能夠收心並融入學習情境。
2. 概念說明：學習比例式 從表格化的書寫，到寫成式子。 (1) 列出想比較的項目。 (2) 呈現方式（項目在下方寫下數值）。 (3) 相同的比（數值的放大縮小） (4) 多組數值之間的對應關係（上到下直觀） (5) 想寫成比例式（將項目變成為代號） (6) 寫法（教導從直式到橫式，從上下到前後） (7) 學習比例關係。	利用一個題目詳細講解其中重要的內容，並具體規劃出比例式中的每一個步驟。
3. 強化概念 舉一反三提問：自己想吃幾顆，請算出餡料需要多少？ 全家需要吃幾顆，請估算應該準備多少餡料？ 若媽媽準備 1100 克的餡料，可以做出幾顆水餃？ (1) 學生寫素養例題第一題。	從自己到家人，規劃自己的需求的水餃顆數，並推算出應該準備的餡料重量。並從餡料的重量推算出可以做出的顆數。

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>答案：</p> <p>I. 在同組當中，後項是前項的 $\frac{4}{3}$ 倍，$a=30 \times \frac{4}{3} = 40$。 $b \times \frac{4}{3} = 20$，$b = 20 \div \frac{4}{3} = 15$。</p> <p>II. 在前後組當中，第一組是第二組的 $30 \div 6 = 5$ 倍，故 $a=8 \times 5$ 倍 $= 40$。 第三組是第二組的 $24 \div 8 = 3$ 倍，故 $b=6 \times 3$ 倍 $= 18$。</p> <p>(2) 學生寫素養例題第二題。</p> <p>答案： $a = 2$，$b = 300$。</p> <p>4. 小試身手</p> <p>學生書寫小試身手的六個題目。 教師檢討小試身手的兩個題目。 其答案為</p> <p>(1) $x=9$ (2) $y=25$ (3) $x=120$ (4) $y=5$ (5) 假設里程為 x，油耗 y 可以寫出比例式為 $95:2.5=114:3=a:8=1216:b$ 第 1 小題 $a=304$ 加滿油箱可行 304 公里 第 2 小題 $b=32$，$32 \div 8=4$，約需要加 4 次油。 (6) 假設包數為 x，熱量 y 可以寫出比例式為 $2:95=5:a=b:570$ 1. $a=237.5$，吃 5 包的熱量為 237.5Kcal 2. $b=12$，一餐最多可吃 12 包。</p>	<p>這題當中具有提示，要學生先看完題目書寫後老師再講解。</p> <p>(1) 學習重點同組間前後項的倍數關係。 (2) 各組別間的放大縮小關係。</p> <p>減少提示學生能利用中間項完整數值，探查與第一組及第三組間的放大縮小的倍數。或能夠將 6:8 縮小成 3:4 再做放大的部分。</p> <p>從簡單的比例算式，到比較複雜需要閱讀的素養應用題，希望學生能夠自行寫出假設，鋪建出比例式，到演算出答案來。</p>

主題三：超級比一比（一節課）

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>1. 前情提要</p> <p>回顧第一節課學生學過的課程。</p>	<p>讓學生能夠收心並融入學習情境。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>2. 概念說明：學習比值</p> <p>為何需要比值 -- 想比較兩種量之間的比率關係。 從想要哪種包裝比較哪個便宜，鋪陳背後需要學習的歷程</p> <p>(1) 比的項目，看單項或兩著間的關係。</p> <p>(2) 探討該怎麼比較，在比便宜當中原本兩個量，先調整成其中一個量一樣，去比較另一個數值。</p> <p>(3) 原本複雜的利用擴分將價錢變成 700 來比，可以簡化它變成 1 元可以比嗎？</p> <p>(4) 將其中一個數值固定變成 1，就是在執行求比值。</p> <p>(5) 再來需要定義便宜，都是 1 元能喝得比較多是便宜。</p> <p>3. 強化概念</p> <p>老師可以提及，並要學生想可以將三個容量通分成一樣再做比較嗎 $(481,650,960) = 2308800$</p> <p>學生感受到數值好大不想算，有求比值的動機。 比較 1 c.c 多少錢。討論數值大是便宜或是貴。</p> <p>(1) 學生寫素養例題第一題。</p> <p>答案：</p> <p>【上半】在大飯糰及小飯糰的比值討論上，重量除以價錢代表在相同的價錢 (重量或價錢) 之下，重量 (重量或價錢) 的數值越大 (大或小)，表示比較便宜。</p> <p>【上半】在大飯糰及小飯糰的比值討論上，價錢除以重量代表在相同的重量 (重量或價錢) 之下，價錢 (重量或價錢) 的數值越小 (大或小)，表示比較便宜。</p> <p>(2) 學生寫素養例題第二題。</p> <p>減少提示，讓學生選擇比值的形式。 是要重量除以價錢；或是價錢除以重量。讓學生能獨立完成</p> <p>答案：(1) 若是重量除以價錢 樂事 2.46、品客 2.44。</p>	<p>利用一個題目詳細講解其中重要的內容，並具體知道比值中的用意。</p> <p>因為不想要數字很大，所以以 1 當單位量就可以比較。凸顯比值的重要性。但要學生知道在數值知道後，數值背後的涵義為何 (單位的重要)</p> <p>這題當中具有提示，要學生先看完題目書寫後老師再講解。</p> <p>減少提示先讓學生書寫。與上面的題目中的表格做些微的改變，讓學生能夠明瞭在求比值時，應該誰該當前項 (被除數) 與後項 (除數)，比值出來後該如何進行判讀。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項																
<p>同樣的價錢樂事重量多，樂事便宜。</p> <p>(2) 若是價錢除以重量</p> <p>樂事 0.406、品客 0.409。同樣的重量品客需要較多錢，樂事便宜。</p> <p>4. 小試身手</p> <p>學生書寫小試身手的三個題目。</p> <p>教師檢討小試身手的三個題目。</p> <p>其答案為</p> <p>(1) 比值 $\frac{3}{5}$</p> <p>(2) 比值 $\frac{10}{3}$</p> <p>(3) 在這一題當中所要比較的项目變多了。</p> <p>包含了張數、包數、及價錢。</p> <p>在這三者關係當中，要學生能夠分析要比什麼。</p> <p>答案：</p> <table><tr><th>品牌</th><th>金得意</th><th>五月花</th><th>春風</th></tr><tr><td>總張數</td><td>7000</td><td>7920</td><td>6600</td></tr><tr><td>價格</td><td>669</td><td>799</td><td>696</td></tr><tr><td>比較值 (張 / 元)</td><td>10.46</td><td>9.91</td><td>9.48</td></tr></table> <p>金得意比較便宜。</p>	品牌	金得意	五月花	春風	總張數	7000	7920	6600	價格	669	799	696	比較值 (張 / 元)	10.46	9.91	9.48	<p>從簡單的比值算式，到比較複雜需要閱讀的素養應用題，希望學生能夠有想法，求出切合題意的答案。</p>
品牌	金得意	五月花	春風														
總張數	7000	7920	6600														
價格	669	799	696														
比較值 (張 / 元)	10.46	9.91	9.48														

主題四：正比（一節課）

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>1. 引起動機</p> <p>(1) 學生書寫學習單四第 1、2 題</p> <p>(2) 教師運用布題情境，引導學生利用表格記錄，發現正比的特徵是你變幾倍，我就跟著變幾倍。正比的核心概念是相同倍數一起改變。</p> <p>2. 動手操作：積木高手</p> <p>(1) 任務：在 10 分鐘內，利用積木拼出上視圖長寬比都是 2:3 的矩形 6 個，最快完成者獲勝。</p> <p>(2) 記錄這些矩形的長和寬。</p>	<p>利用學習單討論，讓學生理解正比的意義。</p> <p>利用兩個題目詳細講解其中重要的內容，並具體知道正比的特徵。</p> <p>透過動手操作，讓學生體驗長變變為原來的幾倍時，寬就會跟著變為原來的幾倍。</p> <p>鼓勵學生發表。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>3. 共同討論</p> <p>提問 1：如果要拼出長寬比都是 2:3 的矩形，長變為原來的 2 倍時，寬會變為原來的幾倍？</p> <p>提問 2：矩形中「長」與「寬」之間的關係稱為正比例，正比例主要特徵是什麼？</p> <p>(1) 兩個項目「長」與「寬」相除是固定的數字</p> <p>(2) 一個項目變為原來的幾倍時，另一個項目就會跟著變幾倍。</p> <p>4. 強化概念</p> <p>在學習單【重要發現】項目中是希望帶入比值相等，引出正比關係式 $y=kx$。另外，也可以利用組間用相同倍率來調整的關係式：$y/400=x/100$，通分後，可以得到 $y=4x$。</p> <p>5. 小試身手</p> <p>(1) 學生書寫小試身手的題目。</p> <p>(2) 老師檢討小試身手的題目。</p>	<p>提問 2：正比例主要特徵是什麼？學生很難寫出明確的答案，老師可以適時引導學生討論。</p>

主題五：反比（一節課）

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>1. 引起動機</p> <p>(1) 學生書寫學習單五第 1、2 題</p> <p>(2) 教師運用布題情境，引導學生利用表格記錄，發現反比的特徵是你變幾倍，我就跟著變你的倒數倍數。反比的核心概念是倒數倍數一起改變。</p> <p>2. 動手操作：積木高手 2</p> <p>(1) 任務：在 10 分鐘內，利用積木拼出上視圖面積為 36 的不同矩形 6 個，最快完成者獲勝。 (設定積木是邊長為 1 的正立方體，而面積是指拼出後平面的面積，而且不能有中空)</p> <p>(2) 記錄這些矩形的長和寬。</p>	<p>利用學習單討論，讓學生理解反比的意義。</p> <p>利用兩個題目詳細講解其中重要的內容，並具體知道反比的意義。</p> <p>透過動手操作，讓學生體驗長變變為原來的幾倍時，寬就會跟著變為原來的倒數倍數。</p> <p>鼓勵學生發表。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>3. 共同討論</p> <p>提問 1：如果要拼出面積固定的不同矩形，長變為原來的 2 倍時，寬會變為原來的幾倍？</p> <p>提問 2：在面積一樣的矩形中，「長」與「寬」之間的關係稱為反比例，反比例主要特徵是什麼？</p> <p>(1) 兩個項目「長」與「寬」相乘是固定的數字。</p> <p>(2) 一個項目變為原來的幾倍時，另一個項目就會跟著變倒數倍數。</p> <p>4. 強化概念</p> <p>在學習單【重要發現】項目中，是希望帶入總量相等時，引出你乘你的，我乘我的，最後會相等的反比關係式 $xy=k$。另外，運用組間項目不同倍率來說明如何判斷反比，即項目 x 變為原來的 k 倍，項目 y 變為原來的 $\frac{1}{k}$ 倍（倒數倍數）。</p> <p>5. 小試身手</p> <p>(1) 學生書寫小試身手的題目</p> <p>(2) 老師檢討小試身手的題目。</p>	<p>提問 2：反比例主要特徵是什麼？學生很難寫出明確的答案，老師可以適時引導學生討論。</p>


主題六：綜合活動（一節課）

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>1. 前情提要</p> <p>回顧上一堂課教學重點。</p> <p>2. 操作活動 1- 比例接龍</p> <p>(1) 每組 4 人，分得一副撲克牌及任務卡一份，每副牌皆取出 7、J、K 不用，其餘的 40 張牌為遊戲卡牌。</p> <p>(2) 每人發六張牌，剩下反面朝上放置，做為抽牌堆。另外牌堆的左側放置四張任務卡，右側放置從牌堆中抽出的四張牌，玩家可以利用自己的及桌面上的撲克牌來做組合。</p>	<p>讓學生能夠收心並融入學習情境。</p> <p>如果任務卡是 6:8，是希望學生能先縮小成 3:4 再做放大找其他符合的數值。學生須具備能將比化成最簡單整數比並算出相等的比。</p>


教學活動流程設計	教學注意事項
<p>(3) 猜拳決定順序，順時針抽卡與出牌，輪到的玩家，先選任務卡再出牌，所有玩家皆可出牌，玩家一次至少要出兩張牌，且所出兩張牌的比例和任務牌的比例相等，所出的牌要依比例以正確順序放在遊戲盤下方兩格中。例如任務卡的比為 2: 3，則可以出 2、3 或 6、9 或 8、Q。(Q 視為 12) 一次只能選一個任務，不限出牌的牌組數目，完成的任務卡放回任務卡推中的最下面一張，再抽一張任務卡，讓桌面至少維持四張任務卡。</p> <p>(4) 當沒人可繼續出牌時，換下一位玩家選擇任務卡，所有玩家可依照新的比例繼續出牌。</p> <p>(5) 當沒有牌可以出時，再從牌堆翻出幾張牌，讓桌面至少維持四張牌；四個任務卡。</p> <p>(6) 當有一位玩家將手中所有牌出完，或牌堆的牌被抽完時，遊戲結束，進行計分，每剩下一張牌計 1 分，分數越低者獲勝。</p> <p>3. 操作活動 2- 正反支援前線</p> <p>(1) 學生兩兩一組，在 15 分鐘內，完成學習單六 10 個題目。</p> <p>(2) 在教室設定 A 點與 B 點，各小組先選出一個代表從 A 點出發到 B 點，兩人輪流當代表。</p> <p>(3) 老師會指定需要什麼資源。例如：5 個成正比、2 個 xy 乘積為定值、3 個不成正比不成反比 ... 等等。</p> <p>(4) 當老師的需求資源提出後，就吹哨開始，各小組就要馬上蒐集資源並前帶到 B 點。</p> <p>(5) 看哪一組先到，並且確認資源無誤後就算獲勝，獲勝隊伍加 1 分。</p> <p>(6) 遊戲依照活動時間採積分制，積分最高組別獲勝。</p> <p>4. 後測</p> <p>將附件一後測題目讓學生作學習後測驗，檢驗學習成效。</p>	<p>請學生先個別書寫學習單六 10 個題目，最後在進行討論。</p> <p>老師在確認資源時，可以跟學生一起來討論各組提供資源的正確與否。 評估學習成效</p>

線上教學 - 更改教學活動

主題四：3、操作活動 - 繪圖專家

教學活動流程設計	教學注意事項																												
<p>(1) 任務：請在 2 分鐘內，利用下面的方格，畫出大小不同，但是長：寬維持 3：2 格子數的矩形數個，畫越多者獲勝。</p> <div></div> <p>(2) 記錄這些矩形的長和寬，如下表：</p> <table><tr><th>目標：長寬比相同的矩形</th><th>長</th><th>寬</th><th>長與寬的比值</th></tr><tr><td>第一個矩形</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>第二個矩形</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>第三個矩形</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>第四個矩形</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>第五個矩形</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>第六個矩形</td><td></td><td></td><td></td></tr></table> <p>(3) 請觀察這些不同矩形之間長和寬的倍數關係，若矩形一的長是矩形二長的 2 倍，那麼矩形一的寬會是矩形二寬的幾倍？</p> <p>(4) 這些矩形中「長」與「寬」之間的關係稱為正比例，正比例主要特徵是什麼？</p>	目標：長寬比相同的矩形	長	寬	長與寬的比值	第一個矩形				第二個矩形				第三個矩形				第四個矩形				第五個矩形				第六個矩形				<p>建議留意學生可能繪製水平線為寬垂直線為長的矩形。</p>
目標：長寬比相同的矩形	長	寬	長與寬的比值																										
第一個矩形																													
第二個矩形																													
第三個矩形																													
第四個矩形																													
第五個矩形																													
第六個矩形																													

主題五：3、操作活動 - 繪圖專家 2

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>(1) 任務：請在 2 分鐘內，利用下面的方格，畫出大小不同，但是面積是 36 格的矩形數個，畫越多者獲勝。</p> 	

教學活動流程設計	教學注意事項																					
<p>(2) 記錄這些矩形的長和寬。如下表：</p> <table><tr><th>目標：面積為 36 的矩形</th><th>長</th><th>寬</th></tr><tr><td>36</td><td></td><td></td></tr><tr><td>36</td><td></td><td></td></tr><tr><td>36</td><td></td><td></td></tr><tr><td>36</td><td></td><td></td></tr><tr><td>36</td><td></td><td></td></tr><tr><td>36</td><td></td><td></td></tr></table> <p>(3) 請觀察這些不同矩形之間長和寬的倍數關係，若矩形甲的長是矩形乙的 2 倍，那麼矩形甲的寬會是矩形乙寬的幾倍？</p> <p>(4) 這些矩形中「長」與「寬」之間的關係稱為反比例，反比例主要特徵是什麼？</p>	目標：面積為 36 的矩形	長	寬	36			36			36			36			36			36			
目標：面積為 36 的矩形	長	寬																				
36																						
36																						
36																						
36																						
36																						
36																						
附件	<ul style="list-style-type: none">· 附件 1：學習單。· 附件 2：前測。· 附件 3：後測。· 附件 4：比例接龍任務卡。· 附件 5：比例接龍任務單。																					



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

評量 工具



本補強課程模組所使用的評量工具包含有：

- (一) 理解學生概念學習狀況的課堂口頭提問。
- (二) 分析學生學習前、後學習效果的前、後測。
- (三) 測驗學生主題單元概念的運算熟悉程度的附件：學習單、小試身手、活動配件及問卷。

一、口頭提問

提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 I- 一 -1-1	想要比兩隊的戰力，需要看那些部分呢？	
主題 I- 一 -2-2	看身材好是看一種感覺嗎？	
主題 I- 一 -3-3	如容量及名稱相同的飲料，甲店家賣 35 元，乙店家賣 30 元，兩家店差多少？	
主題 II- 二 -1-1	自己想吃幾顆水餃，請算出總餡料需要多少克？	
主題 II- 二 -1-2	若媽媽準備 1100 克的總餡料，請問可以做出幾顆水餃？	
主題 III- 三 -1-1	原本複雜的利用擴分將價錢變成 700 來比，可以簡化它變成 1 元來比嗎？	
主題 III- 三 -1-2	要學生想可以將三個容量通分成一樣大再做比較嗎？好算嗎？	
主題 IV- 四 -3-1	如果要拼出長寬比都是 2：3 的矩形，長變為原來的 2 倍時，寬會變為原來的幾倍？	
主題 IV- 四 -3-2	矩形中「長」與「寬」之間的關係稱為正比例，正比例主要特徵是什麼？	
主題 V- 五 -3-1	如果要拼出面積固定的不同矩形，長變為原來的 2 倍時，寬會變為原來的幾倍？	
主題 V- 五 -3-2	在面積一樣的矩形中，「長」與「寬」之間的關係稱為反比例，反比例主要特徵是什麼？	
主題 VI- 六 -1-1	你獲勝的策略是什麼？	

二、前測、後測

1. 前測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	1. 下列有關正比和反比的敘述何者正確？(109 年篩選測驗 24) (A) 長方形的長固定為 8 公分時，其面積和寬成正比 (B) 長方形的寬固定為 5 公分時，其面積和長成反比 (C) 長方形的面積固定為 40 平方公分時，其長和寬成正比 (D) 長方形的周長固定為 26 公分時，其長和寬成反比	進行教學前
	NCP-7-9-2-1 理解正比的名稱與意義。 NCP-7-9-2-2 認識反比的名稱與意義。	
第 2 大題	2. 已知 $a:b=2:3$ ，請問下列選項何者錯誤？(108 年篩選測驗 21) (A) $a:b=2:3$ (B) $a \times 3 = b \times 2$ (C) $a+b=5$ (D) $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$	
	NCP-7-9-1-3 理解比例式 ($a:b=c:d$) 的名稱、意義與記法。	
第 3 大題	3. 已知 $24:(2x+6)=3:4$ ，請問 $x=?$ (109 年篩選測驗 25) (A) 9 (B) 13 (C) 18 (D) 26	
	NCP-7-9-1-3 理解比例式 ($a:b=c:d$) 的名稱、意義與記法。	
第 4 大題	4. 已知 $a:(a-9)$ 的比值為 4， $a=?$ (107 年篩選測驗 18) (A) -3 (B) $\frac{13}{2}$ (C) 12 (D) 13	
	NCP-7-9-1-2 理解比值的名稱與意義。	
第 5 大題	5. 若 $x:3=y:4$ ，且 $x、y$ 皆不為 0，則 $x:y$ 的比值是多少？(106 年篩選測驗 25) (A) 1 (B) 12 (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$	
	NCP-7-9-1-2 理解比值的名稱與意義。	
第 6 大題	6. 已知 $x:(x+6)=3:5$ ，求 $x=?$ (105 年篩選測驗 16) (A) -15 (B) -1 (C) 1 (D) 9	
	NCP-7-9-1-3 理解比例式 ($a:b=c:d$) 的名稱、意義與記法。	

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 7 大題	7. 料理界盛傳蜂蜜檸檬汁的黃金比例為「水 200c.c.、蜂蜜 40c.c.、檸檬汁 10c.c.」。已經得知此比例秘密的你，如果要調製一杯具有此黃金比例的蜂蜜檸檬汁 500c.c.，需要加入多少 c.c. 的蜂蜜？(108 年篩選測驗 8)	進行教學前
	NCP-7-9-3-1 能解決生活情境中有關比例的問題。	
第 8 大題	8. 三年忠班男生人數與女生人數的比為 3：2，已知該班學生人數共有 30 人，請問三年忠班的男生有多少人？(107 年篩選測驗 6)	
	NCP-7-9-3-1 能解決生活情境中有關比例的問題。	
第 9 大題	9. 小尹將一張「寬：長 = 4：6」的照片依照原來的比例放大成海報。若海報長邊的長度為 48 公分，則寬邊的長度為多少公分？(105 年篩選測驗 8)	
	NCP-7-9-3-1 能解決生活情境中有關比例的問題。	
第 10 大題	10. 某店的檸檬綠茶配方，檸檬汁與綠茶的比為 2：5，請問一杯 700c.c. 的檸檬綠茶中，檸檬汁有多少 c.c.?(109 年篩選測驗 10)	
	NCP-7-9-3-1 能解決生活情境中有關比例的問題。	

2. 後測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	1. 下列有關正比和反比的敘述何者正確？ (A) 長方形的周長固定為 24 公分時，其長和寬成反比 (B) 長方形的面積固定為 80 平方公分時，其長和寬成正比 (C) 長方形的寬固定為 10 公分時，其面積和長成正比 (D) 長方形的長固定為 6 公分時，其面積和寬成反比 (修改 109 年篩選測驗 24)	可於第 5 節課 後實施
	NCP-7-9-2-1 理解正比的名稱與意義。 NCP-7-9-2-2 認識反比的名稱與意義。	
第 2 大題	2. 已知 $a:b=3:8$ ，請問下列選項何者錯誤？ (A) $a \times 8 = b \times 3$ (B) $a:3=b:8$ (C) $\frac{a}{b} = \frac{3}{8}$ (D) $a+b=11$ (修改 108 年篩選測驗 21)	可於第 2 節 課後實施
	NCP-7-9-1-3 理解比例式 ($a:b=c:d$) 的名稱、意義與記法。	

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 3 大題	3. 已知 $24 : (x + 6) = 8 : 3$ ，請問 $x = ?$ (A) 3 (B) 9 (C) 58 (D) 64 (修改 109 年篩選測驗 25)	可於第 2 節 課後實施
	NCP-7-9-1-3 理解比例式 ($a : b = c : d$) 的名稱、意義與記法。	
第 4 大題	4. 已知 $(a + 3) : 2a$ 的比值為 2， $a = ?$ (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (修改 107 年篩選測驗 12)	可於第 3 節 課後實施
	NCP-7-9-1-2 理解比值的名稱與意義。	
第 5 大題	5. 若 $x:5 = y:7$ ，且 $x、y$ 皆不為 0，則 $x:y$ 的比值是多少？ (A) 1 (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{7}{5}$ (D) 35 (修改 106 年篩選測驗 25)	可於第 3 節課 後實施
	NCP-7-9-1-2 理解比值的名稱與意義。	
第 6 大題	6. 已知 $6:(2x+1)=2:(2x-1)$ ，求 $x=?$ (A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1 (修改 105 年篩選測驗 16)	可於第 2 節 課後實施
	NC-7-9-3 比例式的基本運算	
第 7 大題	7. 小張需要繩子綑綁一件貨品，因此將一條繩子長為 120 公分，按 1:3 的比例將繩子剪成兩段後，則較短的繩子長為多少公分？(修改 108 年篩選測驗 8)	可於第 6 節 課後實施
	NCP-7-9-3-1 能解決生活情境中有關比例的問題。	
第 8 大題	8. 一年一班全班有 20 人，男生和女生的比為 2:3，請問一年一班女生有多少人？(修改 107 年篩選測驗 6)	可於第 6 節 課後實施
	NCP-7-9-3-1 能解決生活情境中有關比例的問題。	
第 9 大題	9. 小吉將一張「長：寬 = 3:2」的照片依照原來的比例放大成海報。若海報長邊的長度為 60 公分，則寬邊的長度為多少公分？(修改 105 年篩選測驗 8)	可於第 6 節 課後實施
	NCP-7-9-3-1 能解決生活情境中有關比例的問題。	
第 10 大題	10. 某飲料店販賣檸檬果汁，一杯檸檬果汁只含有檸檬原汁及水，其總量為 400c.c.，檸檬原汁及水的比例為 1:4，請問此杯果汁含有檸檬原汁多少 c.c.？(修改 109 年篩選測驗 10)	可於第 6 節 課後實施
	NCP-7-9-3-1 能解決生活情境中有關比例的問題。	

教學反思 應用建議



這一次利用學期中第八節時段，主要是幫學習成績低落的八年級學生進行比例式與正反比的觀念建立。這一次從貼近生活比出素養出發、讓學生有一個全新比的格式，藉由將日常生活情境融入教材，透過生活情境來討論比、比例式與比值；透過對話討論讓學生明白比就是要先列出項目、探討項目間的倍數關係、比的虛與實概念、以基準量看比值等；進而運用畫圖的動手操作與圖像表徵來說明正反比的概念，最後運用符號表徵正反比的關係式，希望透過這一系列的操作方式，對學生的學習是有助益。

一、學生表現

(一) 前測

對象為二年級學習扶助學生個案，共七位，第一節課先進行線上前測 (quizizz)，此為診斷性試題 (共 10 題，詳見前測卷)，主要目的為了解學生對於學習重點的掌握程度，以便於進行學習扶助教學時，隨學生學習情況調整教學內容。

前測成績表現

基本學習內容	學生 1	學生 2	學生 3	學生 4	學生 5	學生 6	學生 7	答對比率 (%)
1.NC-7-9-2 正比與反比	○	×	×	×	×	×	×	14.286
2. NC-7-9-3 比例式的基本運算	×	○	×	×	×	×	×	14.286
3. NC-7-9-3 比例式的基本運算	○	×	×	○	×	×	×	28.571
4. NC-7-9-3 比例式的基本運算	×	○	○	○	×	×	×	42.857
5. NC-7-9-1 比與比值	×	○	×	×	○	×	×	28.571
6. NC-7-9-1 比與比值	×	○	○	×	×	×	×	28.571
7.NC-7-9-3 比例式的基本運算	○	×	×	×	×	×	×	14.286
8. NC-7-9-3 比例式的基本運算	×	○	×	×	×	×	×	14.286
9. NC-7-9-3 比例式的基本運算	○	×	×	×	×	×	○	28.571
10. NC-7-9-3 比例式的基本運算	○	○	○	×	×	○	×	57.142
正確率 (%)	50	60	30	20	10	10	10	27

(二) 後測

最後一節課進行線上後測 (quizizz)，此為診斷性試題 (共 10 題，詳見前測卷) (共 10 題，詳見後測卷)，試題與前測試題幾乎相同，僅調整題目順序或更改數字，藉以評估學生學習成效。

後測成績表現

1.NC-7-9-2 正比與反比	學生 1	學生 2	學生 3	學生 4	學生 5	學生 6	學生 7	答對比率 (%)
2. NC-7-9-3 比例式的基本運算	○	○	×	×	×	×	×	28.5714
3. NC-7-9-3 比例式的基本運算	○	○	×	○	×	○	×	57.1429
4. NC-7-9-3 比例式的基本運算	×	×	○	○	×	×	○	42.8571
5. NC-7-9-1 比與比值	×	×	×	○	×	×	×	14.2857
6. NC-7-9-1 比與比值	×	×	×	○	○	×	○	42.8571
7. NC-7-9-3 比例式的基本運算	×	○	○	○	×	×	×	42.8571
8. NC-7-9-3 比例式的基本運算	○	○	×	○	×	○	○	57.1429
9. NC-7-9-3 比例式的基本運算	○	○	×	○	×	×	×	42.8571
10. NC-7-9-3 比例式的基本運算	○	○	○	○	×	×	○	71.4286
正確率 (%)	○	○	×	○	×	○	×	57.1429
正確率 (%)	60 %	70 %	30 %	90 %	10 %	30 %	30 %	46

(三) 學生學習成效

前後測試題設計之測驗目的以及學生答題情況詳見下表 2，根據前後測結果，學生經過學習扶助補強性教學後，整體答對率由 27% 提升至 46%，由待加強等級提升至基礎級。

表 2 學生前後測整體答題情況差異分析

基本學習內容	前測題目	後測題目	通過率 (人數)	通過率 (人數)	差異 分析
NC-7-9-2 正比 與反比	本題給定四個描述正反比的敘述，要求學生選出正確的敘述，評量學生是否理解正比與反比的意義。	下列有關正比和反比的敘述何者正確？ (A)長方形的長固定為 8 公分時，其面積和寬成正比 (B)長方形的寬固定為 5 公分時，其面積和長成反比 (C)長方形的面積固定為 40 平方公分時，其長和寬成正比 (D)長方形的周長固定為 26 公分時，其長和寬成反比 (108 年篩選測驗 24) 解：_____。A	14.3%(1)	28.6%(2)	14%
NC-7-9-3 比例式的 基本運算	本題給定有未知數符號的比例式，要求學生選出錯誤的算式，評量學生比例式基本運算的能力。	已知 $a:b=2:3$ ，請問下列選項何者錯誤？ (A) $a:2=b:3$ (B) $ax3=bx2$ (C) $a+b=5$ (D) $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ (108 年篩選測驗 21) 解：_____。C	14.3%(1)	57%(4)	43%
NC-7-9-3 比例式的 基本運算	本題給定一個含未知數的比例式，要求學生求出未知數的值，評量學生比例式基本運算的能力。	已知 $24:(2x+6)=3:4$ ，請問 $x=?$ (109 年篩選測驗 25) (A) 9 (B) 13 (C) 18 (D) 26 解：B	14.3%(1)	42.3%(3)	28%

基本學習 內容	前測題目	後測題目	通過率 (人數)	通過率 (人數)	差異 分析
NC-7-9-3 比例式的 基本運算	本題給定有未知數的比例式，要求學生算出未知數的值，評量學生比例式基本運算的能力。	已知 $x:(x+6)=3:5$ ，求 $x=?$ (105 年篩選測驗 16) (A) -15 (B) -1 (C) 1 (D) 9 解：D	28.6%(2)	42.3%(3)	14%
NC-7-9-1 比與比值	本題給定含有一個未知數的比值，要求學生算出未知數的值，評量學生是否掌握比值的意義。	已知 $a:(a-9)$ 的比值為 4， $a=?$ (107 年篩選測驗 18) (A) -3 (B) 13/2 (C) 12 (D) 13 解：C	42.3%(3)	14.3%(1)	-28%
NC-7-9-1 比與比值	本題給定包含有兩個未知數的比例式，要求學生求出這兩個未知數的比值，評量學生運用比例式運算解題的能力。	若 $x:3=y:4$ ，且 x,y 皆不為 0，則 $x:y$ 的比值是多少？(106 年篩選測驗 25) 解： $\frac{3}{4}$	28.6%(2)	42.3%(3)	14%
NC-7-9-3 比例式的 基本運算	本題給定兩個分量的比及其總量，要求學生算出其中一個分量，評量學生比例式基本運算的能力。	某店的檸檬綠茶配方，檸檬汁與綠茶的比為 2:5，請問一杯 700c.c. 的檸檬綠茶中，檸檬汁有多少 c.c.？(109 年篩選測驗 10) 解：200	57%(4)	57%(4)	0%
NC-7-9-3 比例式的 基本運算	本題給定總量與三個不同分量之數量比，要求學生求出其中一個分量，評量學生運用比例式解題的能力。	料理界盛傳蜂蜜檸檬汁的黃金比例為「水 200c.c.、蜂蜜 40c.c.、檸檬汁 10c.c.」。已經得如此比例秘密的你，如果要調製一杯具有此黃金比例的蜂蜜檸檬汁 500c.c.，需要加入多少 c.c. 的蜂蜜？(108 年篩選測驗 8) 解：80	14.3%(1)	57%(4)	42%
NC-7-9-3 比例式的 基本運算	本題給定兩分量的比及總量，要求學生算出其中一個分量，評量學生運用比例式解題的能力。	三年忠班男生人數與女生人數的比為 3:2，已知該班學生人數共有 30 人，請問三年忠班的男生有多少人？(107 年篩選測驗 6) 解：18	28.6%(2)	42.3%(3)	14%
NC-7-9-3 比例式的 基本運算	本題給定兩份量的比及其中一個分量，要求學生算出另一個分量，評量學生運用比例式運算解題的能力。	小尹將一張「寬：長 = 4:6」的照片依照原來的比例放大成海報，若海報長邊的長度為 48 公分，則寬邊的長度為多少公分？(105 年篩選測驗 8) 解：32	28.6%(2)	71.4%(5)	42%

三、教學反思與建議

(一) 反思

補強課程希望透過生活中的實例、動手操作、圖像、情境、對話討論、符號等表徵，逐步說明為何要引入比例的概念，以及學習比的概念，避免直接進行抽象的規則操弄，或者流於規則的記憶而無法理解比的運算思維。然而因為受到疫情影響，孩子的學習由實體教室變為線上學習，操作型的教學活動如比例接龍、正反支援前線，便無法實施，如果可以實施，進一步可以增進孩子的精熟學習，相信教學成效會更好。

面對停課不停學的情況，老師積極參加各式線上研習，充實自己教學知能，因此，此次模組得以在線上實施教學，其中亦調整實體操作活動 - 積木高手，改為線上操作活動 - 繪圖專家，教師透過溝通平臺如 Classroom、Google meet、點名擴充等與孩子進行溝通，並透過 Jamboard、計時器、選號器、線上評量 (Kahoot、Quizizz) 等資源與孩子進行互動，搭配課堂點數的累計，投其所好，讓孩子的學動機得以延續，其實教師可以製造學習的共同感而非競爭環境，讓大家可以互相教、互相學，創造一個良好且正向的環境來讓孩子來經歷，激發自己內在學習的動機。

課堂表現：努力 達到自己的目標 吧！成功得來不易 ・願你再接再厲 ・含淚播種的人 ・必歡樂收割	1瑄	2全	3翰	4嘉	5博
	+11	+9	+17	+11	+11
	6丞	7閔			
	+11	+15			

圖 1：線上學習表現統計表

教師善用數位科技，增加與孩子互動的機會，如透過 Jamboard 與問答模式進行共編，教師可以立即知道孩子的學習表現，並給予回饋，亦運用 Classroom 的課堂功能，為孩子建立完整的學習歷程記錄。

(二) 建議

1. 調整教學順序

活動設計每單元可獨立運用，可依學生學習狀況調整活動先後順序。

例：在主題主題 II 比例式與主題 III 比值教學後，立即進行主題 VI 精熟遊戲之比例接龍活動。

2. 調整教學內容

為了讓模組也可以在線上教學時，與學生產生互動，因此將實體操作活動 - 積木高手，改為線上操作活動 - 繪圖專家。

二、下面哪一人身材比較好呢？

為什麼呢？

想比身材，需要看那些部分呢？

光看感覺不準，最關鍵的要



D;因為肌肉比較發達；
手臂、胸部、腹部

【重點提要】 想要比較兩件事物，事物因為有多樣的細項，先條列出要比的項目，並希望該項目能用數值呈現。

D,肌肉結實 6

陳建全 A
因為身體符合黃金比例

D,因為看起來很壯，要有肌肉陳

閱
1.D身材比較好
2.看腹肌、肌肉
3.最關鍵要看身材比例

3號戴東翰
1.D
2.因為跟其他人來比較
3.比他們的黃金比例

1.D 2.有腹肌 3.身材壯碩 (博)

圖 2：線上互動 Jamboard 孩子學習反應

3、操作活動-繪圖專家 2

(1)任務：請在 2 分鐘內，利用下面的方格，畫出大小不同，但是面積是 36 格的矩形數個，畫越多者獲勝。

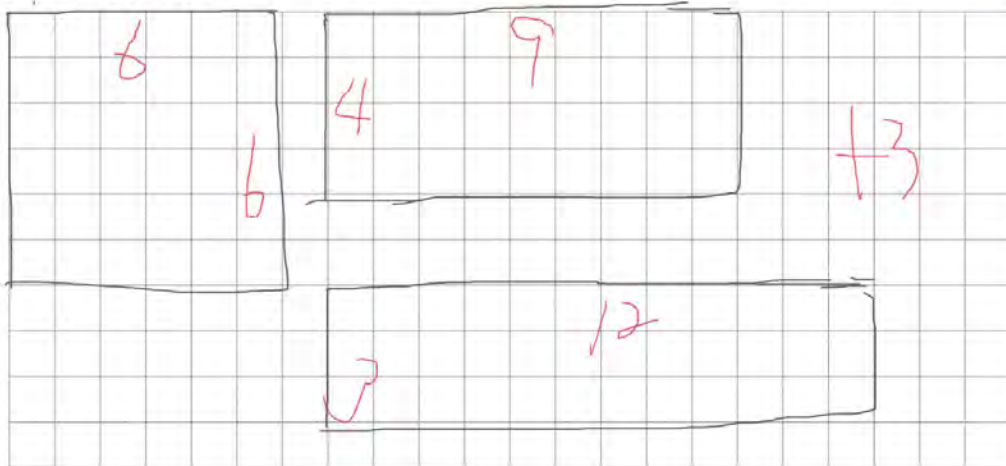


圖 3：線上互動 Jamboard 線上繪圖專家競賽

3. 調整測驗方式

這次因為疫情影響，將以往前後測紙筆測驗改為運用線上評量工具 Quizizz 來進行，透過競賽模式，題目亂數、選項亂數、各題限時，具有防弊效果，每個人進行所有題目完成後才知道分數，得分以百分比呈現，方便老師做試題分析。如果在前測後測時，增加孩子計算過程的記錄，更可以得知孩子的想法，更有助於教師教學的進行與調整。

參考文獻

鍾靜、許馨月、翁嘉聲（2001.11）。專家教師經營討論式數學教學之個案研究。論文發表於國立臺中師範學院舉辦之「九十學年度師範學院教育學術論文發表會」，臺中市。

郭慧玲（2003）。探討量化素養的意涵與評量中學生量化素養工具之開發。國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，臺北市。

國中數學領域 補強課程模組 6

七年級

三視圖、對稱圖及符號表示

— 雲林縣立虎尾國民中學 盧昭雯退休教師
— 雲林縣立虎尾國民中學 江世賓主任

設計
理念

Skemp 在《數學學習心理學》一書中提到，如果學生的學習是屬於「將硬背的公式、招數應用於特定問題，但不知背後的原因與原理」的機械式理解，則學生將不易了解，且容易產生枯燥之感（引自林義雄與陳澤民譯，1987）。而美國哈佛大學的心理學系教授布魯納（J.S.Bruner, 1915~2016）也指出，知識學習的三個表徵中的動作表徵期（Enactive representation）應透過「做中學」的經驗，鼓勵學生自己去進行思考、比較、對照與運用各種策略，來發現教材中所含的重要概念（引自王文科，2000）。

本教學計畫的主題是「三視圖、對稱圖及符號表示」。「簡易幾何」是國中幾何的基礎，對學生而言，應該是很淺顯易懂的概念，但學生既要記得每一個簡單圖形的幾何特性，又要記住其相對的定義，對於學習力較為低落的學生來說，學起來既吃力又辛苦；而對於無心學習的學生來說，更不會花心思去熟記符號的表示法。當學生無法掌握「簡單圖形的意義」與「常用符號的記法」的學習時，就會影響後續幾何部分的學習。

反觀課室教學現場，老師的教學常會受到教學時數及會考成績影響。在教學時數的限制下，老師為了趕教學進度，課堂上常無法給學生有足夠的思考時間，導致很多觀念都是一知半解，而在沒有釐清學習觀念，具備應有的先備知識之下，將影響後續概念的學習：在考試引導教學下，為了能增加反覆練習時間，老師常以直接說明替代動手操作，對於抽象概念的學習，部分七年級學生的學習尚未從具體運思期階段轉為抽象形成期階段，因此概念的學習容易因不懂而囫圇吞棗，無法消化吸收，也會因學

習中遇到障礙，沒有成就感，就覺得數學無趣，久而久之，放棄數學學習的學生就比比皆是。

因此，本教案的設計不強調反覆練習，希望學生跳脫機械式的訓練，以「邊做邊學的摺紙」來設計教學活動，期待利用摺紙中學數學，讓學生能感受到學習的多樣性，除引起學生的學習興趣，也讓學生從具體操作過程中加深學習的概念，進而能掌握此部分的學習。並於課堂最後以自己所摺出來的正立方體觀察，配合九宮格透明片觀察上下視圖、左右視圖、前後視圖的關係，進而理解三視圖間的概念。最後將正立方體組成「無限魔方」紓壓玩具，讓學生能感受到除了成績以外的成就感，進而能不排斥數學的學習。

課程架構

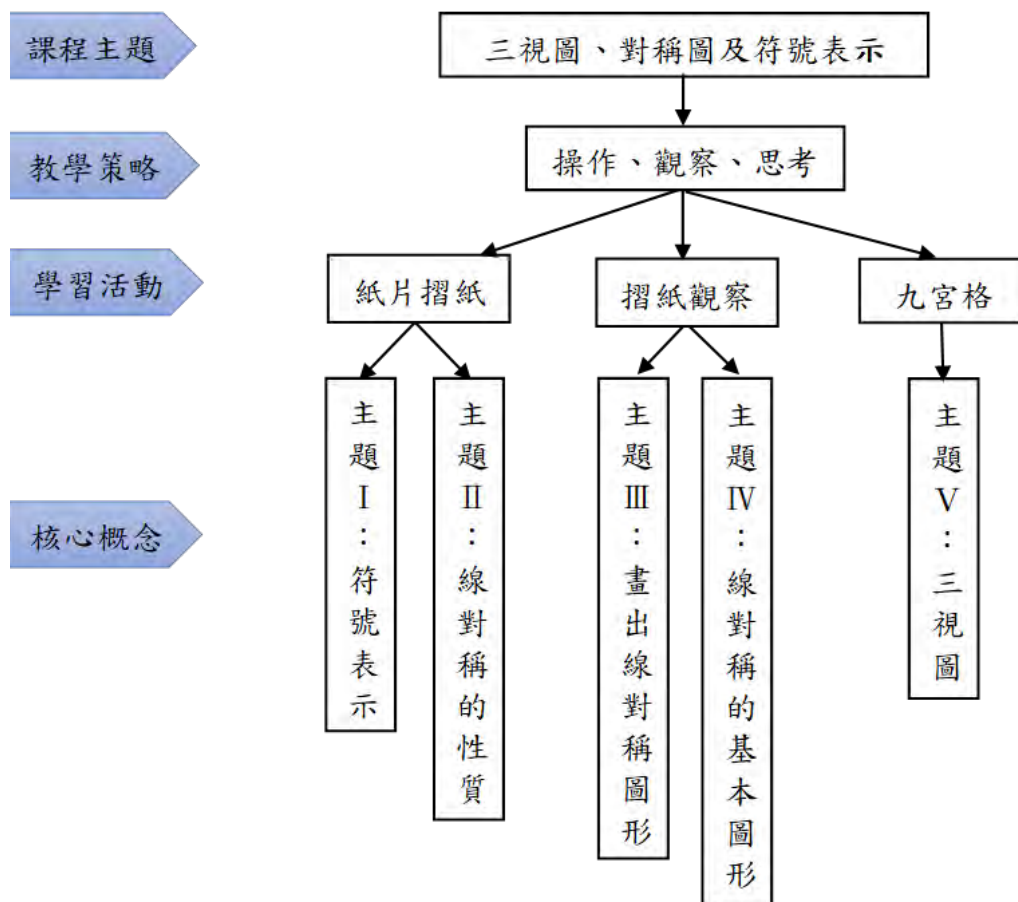


圖 1：單元主題課程架構圖

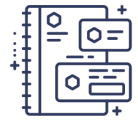
- (一) 主題 I (第一節課)：拿出紓壓玩具 -- 「無限魔方」，與學生討論製作方式，以引起學生興趣。利用摺紙過程步驟一的「紙張對摺」摺痕，導入「垂直」、「平分」、「中垂線」…等概念及符號學習，讓學生能在做中學的需求過程中，願意去學習基本幾何概念及符號表式。同時於後面課堂教學過程中，逐步成摺紙拚片並組成「三視圖」教學所需的正立方體，前後呼應，形成一個完整的學習過程，同時持續維持學生的學習興趣。
- (二) 主題 II (第二節課)：利用第 1 堂課所摺的紙張，配合學習單一，引導學生能觀察說出線對稱中「對稱線段等長」、「對稱角相等」的性質，接下來帶領學生完成摺紙步驟二，操作過程中，隨時口頭提問，讓學生能更熟悉「對稱線段」、「對稱角」的關係。之後將所摺紙張配合學習單二來觀察「對稱點連線與對稱軸關係」的性質。最後利用「剪紙活動」來強化學生的概念學習並立即評估學生的學習狀況，以即時處理學生的學習問題。
- (三) 主題 III (第三節課)：複習上節課所學線對稱圖形中，對稱軸跟對稱點連線的關係後，剪下附件 5 的圖形對摺重疊，讓學生找出對稱點位置，以引導學生活用對稱軸跟對稱點連線的關係畫出線對稱圖形，再利用〈小試身手〉來檢驗學生此堂課的學習。
- (四) 主題 IV (第四節課)：準備多種平面多邊形圖形，先讓學生討論這些圖形是否為線對稱圖形及其對稱軸數量，再讓學生剪下這些平面圖形並對摺重疊，以釐清那些圖形不是線對稱圖形，同時引導學生觀察線對稱圖形經過對摺重疊後，對稱軸與邊或頂點間的關係。
- (五) 主題 V (第五、六節課)：第五節課為彈性時間，用於加強「對稱圖」或「符號表示」學生學習不佳的部分，同時帶領學生完成前 3 堂所摺拚片，並引導學生將拚片組裝成正立方體。第六節課介紹三視圖，先利用學習單五國外教科書題目，讓學生感受生活中的數學，理解不是只有紙筆的計算才是數學。將前堂課所完成的正立方體排成非中空的立體圖形後，藉由透過九宮格透明片的觀察，來說明前後視圖、上下視圖、左右視圖的概念，進而理解三視圖間的關係並繪製三視圖。最後將正立方體粘貼組成紓壓玩具 -- 「無限魔方」。

綜合來說，本補強課程模組期望學生達成的目標如下：

1. 不排斥數學學習。
2. 能正確使用幾何符號，尤其是角的記法。
3. 能正確理解線段才有中垂線、中點。
4. 能繪製線對稱圖形並理解線對稱的基本圖形及其對稱軸。

5. 能清楚平行四邊形不是線對稱圖形。
6. 能正確判別視圖的方向，尤其是左右視圖。
7. 能繪製三視圖。

教材分析



(一) 本補強課程模組教材重要性

垂直與平行等概念是現代生活與科技工具需要的能力，也是進入幾何學學習的基本。而正方體積木的堆疊，可培養學生觀察立體圖形並繪製視圖，並從視圖的繪製來理解站在不同位置觀察立體圖形的結果。本模組的學習內容貫穿國、高中空間概念的課程，建立概念後學生不僅能有平面定位、立體定位的數學素養，也能奠下未來學習平面坐標系、空間坐標系的基礎。

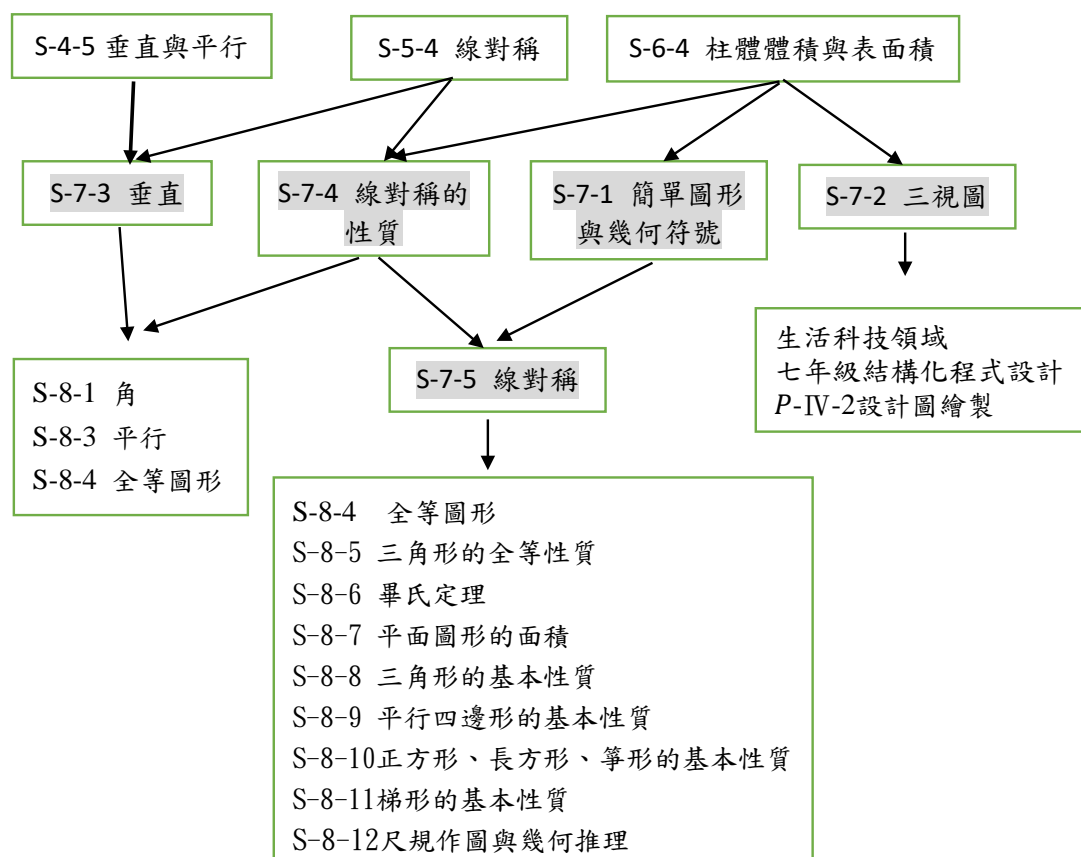


圖 2：補強課程模組學習內容與其他年段學習內容間的關係圖

(二) 本補強課程模組教材學習內容分析

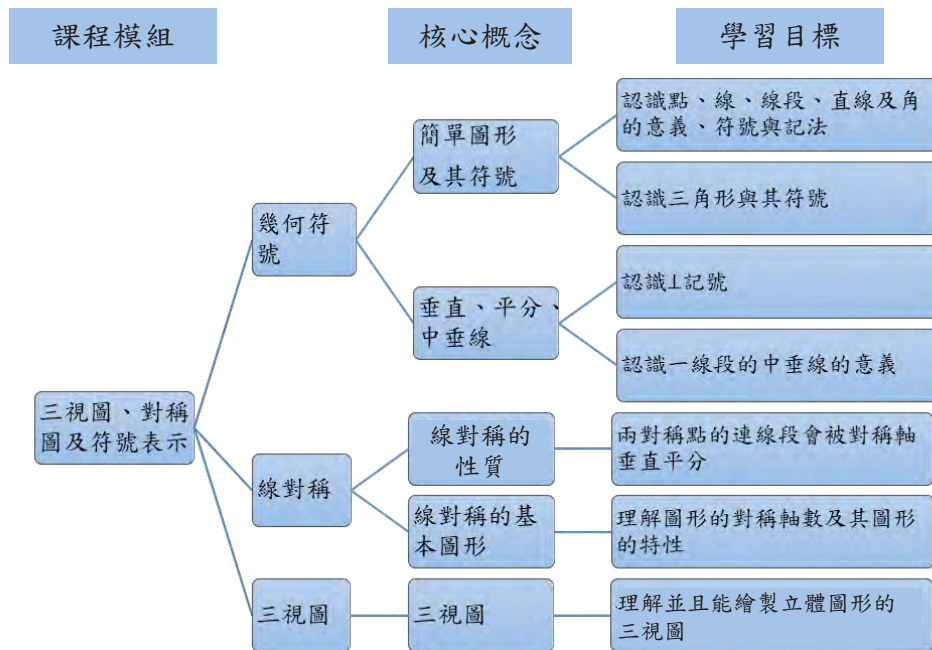


圖 3：本補強課程模組的核心概念與學習目標架構

(三) 教材分析與課程架構的關係

本補強課程模組教材包含幾何符號、線對稱及三視圖，是進入平面幾何及立體圖形學習的基礎，採用摺紙操作及觀察的學習策略，以學生學習興趣為起點，並能夠由認識幾何符號到實際運用，感受到教材內容的實用。

表 1：本補強課程模組教材分析與課程架構教學關係

課程模組核心概念	學習活動	教學策略	教學內涵
簡單圖形及其符號	紙片摺紙	主題 I (第 1 節課)	紙片摺紙操作過程中，因應步驟說明需求加入點、線、線段、直線、角、三角形與其符號的介紹。每步驟利用口頭提問說明垂直、平分、中垂線等概念。
線對稱的性質	紙片摺紙	主題 II (第 2 節課)	延續主題 I，紙片摺紙過程中，認識「對稱軸」且觀察理解「對稱線段等長」、「對稱角相等」，並於摺紙後將對稱點連線，測量觀察理解「對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分」。
	摺紙觀察	主題 III (第 3 節課)	強化「對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分」概念，並運用於繪製「線對稱圖形」。

課程模組核心概念	學習活動	教學策略	教學內涵
線對稱的基本圖形	摺紙觀察	主題 IV (第 4 節課)	剪下平面幾何圖形後，摺摺看，觀察各圖形的特性，並判定是否為線對稱圖形？若是，理解其對稱軸數。
三視圖	九宮格	主題 V (第 5、6 節課)	利用九宮格觀察立體圖形各視圖間的關係，並理解且繪製立體圖形的三視圖。

教學計畫



模組名稱	代數符號及一元一次式
------	------------

授課節數規劃	六節課
--------	-----

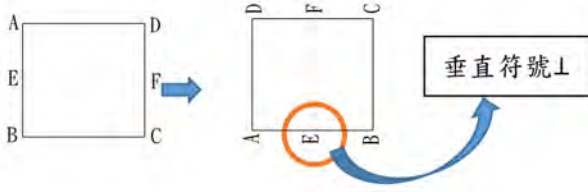
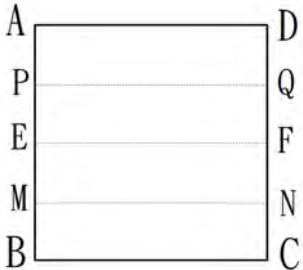
學習重點 (內容、概念、能力)	學習內容 <p>S-7-1 簡單圖形與幾何符號：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹 (s-IV-1)。</p> <p>S-7-2 三視圖：立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體且不得中空 (s-IV-16)。</p> <p>S-7-3 垂直：垂直的符號；線段的中垂線；點到直線距離的意義 (s-IV-3)。</p> <p>S-7-4 線對稱的性質：對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分 (s-IV-5)。</p> <p>S-7-5 線對稱的基本圖形：等腰三角形；正方形；菱形；箏形；正多邊形 (s-IV-5)。</p>
	學習表現 <p>s-IV-1 理解常用幾何形體的定義、符號、性質，並應用於幾何問題的解題。</p> <p>s-IV-3 理解兩條直線的垂直和平行的意義，以及各種性質，並能應用於解決幾何與日常生活的問題。</p> <p>s-IV-5 理解線對稱的意義和線對稱圖形的幾何性質，並能應用於解決幾何與日常生活的問題。</p> <p>s-IV-16 理解簡單的立體圖形及其三視圖與平面展開圖，並能計算立體圖形的表面積、側面積及體積。</p>

<p>學習重點 (內容、概念、能力)</p>	<p>基本學習內容</p> <p>SC-7-1-1 簡單圖形與常用符號，如點、線、線段、射線、角、三角形 的意義、符 號及記法。</p> <p>SC-7-2-1 立體形體的三視圖。</p> <p>SC-7-3-1 線段中點及中垂線的意義。</p> <p>SC-7-3-2 點到直線距離的意義。</p> <p>SC-7-4-1 線對稱圖形中，對稱線段相等，對稱角相等，對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。</p> <p>SC-7-5-1 線對稱的基本圖形。</p>
<p>適用對象 (學生先備知識與分析)</p>	<p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容</p> <p>S-4-5 垂直與平行 以具體操作為主。直角是 90 度。直角常用符號。垂直於一線的兩線互相平行。平行線間距離處處相等。作垂直線；作平行線。</p> <p>S-5-4 線對稱 線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。</p> <p>S-6-4 柱體體積與表面積 含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積 × 高」的公式。簡單複合形體體積。</p>
<p>教學連結建議</p>	<p>1. 銜接概念：畢氏定理、三角形的基本性質、平行與四邊形</p> <p>S-8-1 角 S-8-3 平行 S-8-4 全等圖形 S-8-5 三角形的全等性質 S-8-6 畢氏定理 S-8-7 平面圖形的面積 S-8-8 三角形的基本性質 S-8-9 平行四邊形的基本性質 S-8-10 正方形、長方形、箏形的基本性質 S-8-11 梯形的基本性質 S-8-12 尺規作圖與幾何推理</p> <p>2. 跨學科應用：三視圖為生活科技領域七年級結構化程式設計的基礎</p> <p>P-IV-2 設計圖繪製</p>

學習目標	<ol style="list-style-type: none"> 1. 點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。理解垂直的符號；線段的中垂線；點到直線距離的意義。 2. 理解線對稱圖形的對稱線段等長；對稱角相等。 3. 理解線對稱圖形的對稱點連線段會被對稱軸垂直平分，並能運用畫出線對稱圖。 4. 理解線對稱的基本圖形及其對稱軸數。 5. 理解立體圖形各視圖間的關係。 6. 理解立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖並繪製圖形。
教學策略	<div data-bbox="485 703 1374 808"> <pre> graph LR A[動動手 ---摺紙] --> B[動動嘴 ---提問] B --> C[動動腦 ---教學活動] </pre> </div> <ol style="list-style-type: none"> 1. 讓學生結合摺紙操作，通過自主探究活動，初步認識平分與垂直。 2. 使學生經歷從現實空間中觀察抽象的過程，培養空間觀念。 3. 在數學活動中讓學生感受到數學知識的趣味性，增強學生對數學的興趣，養成獨立思考的習慣，培養用數學的意識。 4. 以「提問教學法」配合「活動融入教學」的方式進行課程。
教學材料	<ol style="list-style-type: none"> 1. 小正方形色紙（邊長約 7.5 公分，3 種顏色，每種顏色各 16 張） 2. 學習活動完整流程圖（附件 1） 3. 學習單（附件 2-6）。 4. 操作附件（附件 7-10）
教學資源	<ol style="list-style-type: none"> 1. 拚片製作過程及正立方體組裝網站： https://www.youtube.com/watch?v=M1iSPeF8Ss8  2. 學習單五活動題目 http://ceag.ylc.edu.tw/v2/file/downfile/files/21790 

主題 I：簡單圖形與幾何符號

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>1. 引起動機</p> <p>拿出”無限魔方”紓壓玩具(或以 PPT 圖片呈現)，口頭問學生有沒有看過或玩過此玩具，點燃學生的討論。並說明我們將在課堂學習過程中製作此玩具，以引起學生的學習興趣。</p> <p>2. 動手操作</p> <p>(1) 發下正方形紙張(一般紙張即可)</p> <p>(2) 教師口頭提問</p> <p>提問 1：這張正方形紙張對摺可以重疊嗎？若可以，有哪些對摺法？</p> <p>(此提問是為了線對稱的對稱軸鋪陳，但暫不代入對稱軸概念。)</p> <p>提問 2：這正方形紙張是否為線對稱圖形？</p> <p>(學生無論回答”是”或”否”，都進行提問 3。)</p> <p>提問 3：何謂線對稱圖形？</p> <p>(S-5-4 線對稱已透過操作理解何謂線對稱圖形。)</p> <p>(3) 引導學生將手上的正方形紙張，上下對摺如下圖後，口頭下達下一步驟的指示為：</p> <p>「將點跟點重合，使線段重疊」</p> <div data-bbox="295 1451 569 1720" data-label="Image"> </div> <p>(4) 教師提問：能依「將點跟點重合，使線段重疊」指示，摺出來一樣的摺痕嗎？</p> <p>(5) 學生反問：哪兩個點重合？誰跟誰要重疊？</p> <p>此時，教師可說：為了順利摺出拚片，所以我們要制定一些符號讓摺紙步驟容易說明</p>	<p>待補強學生對學習大部分欠缺學習動力，教學上以引起學生的學習動力為主要考量。</p> <p>也可使用 A4 紙，從摺出正方形開始。學生常只說出以下兩種對摺法。</p> <div data-bbox="930 896 1337 1081" data-label="Image"> </div> <p>都給予稱讚、鼓勵，並引導學生說出以下兩種對摺法。</p> <div data-bbox="930 1193 1337 1379" data-label="Image"> </div> <p>未提問前，學生可能已詢問是哪個點？哪條線？此時就直接帶出幾何符號介紹</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
 <p>(3) 學生討論</p> <p>指導學生將手中紙張摺成下圖形式後，觀察、討論並完成學習單一 (附件 2) 中第二題中第 1、2、3 小題</p>  <p style="text-align: center;">圖三</p> <p>(4) 教師說明</p> <p>學生完成後，帶領學生一邊完成說明 3 並讓學生理解與線段垂直的直線不只有一條及點到直線距離的意義。</p> <p>5. 回顧與總結</p> <p style="text-align: right;">(第一節課結束)</p>	<p>觀察並檢視學生的學習情況，在旁隨時指導。</p> <p>回顧簡單圖形與幾何符號、垂直等概念。</p> <p>請學生保管好手中所摺紙張，下堂課繼續使用。</p>

主題 II：理解線對稱的性質

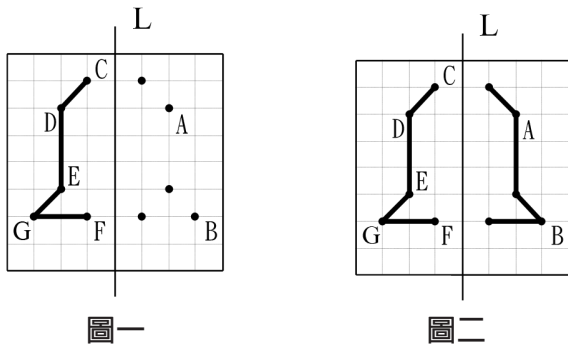
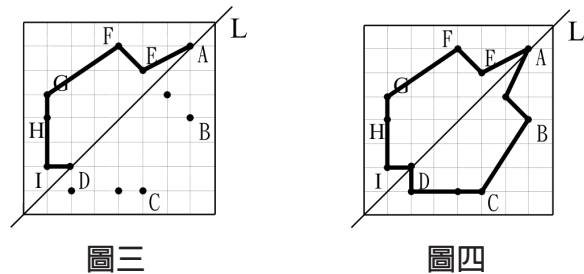
教學活動流程設計	教學注意事項
<p>1. 學習回顧</p> <p>回顧上一堂課「簡單圖形與幾何符號、垂直等概念」的教學重點。</p> <p>2. 定義說明導入活動一</p> <p>(1) 請學生拿出上堂課所摺紙張，並摺出學習單一 中圖二圖形 (如下圖)</p>	<p>待補強學生對學習大部分欠缺學習動力，教學上以引起學生的學習動力為主要考量。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<div data-bbox="268 392 614 582" data-label="Image"> </div> <p>(2) 教師口頭提問</p> <p>提問 1：觀察你們手中對摺後的圖形，可看到那些點會重疊？那些線段會重疊？</p> <p>提問 2：對摺後，重疊的點、重疊的線段及重疊的角我們給予什麼名稱？</p> <p>(「對稱點」、「對稱邊」及「對稱角」名稱在「S-5-4 線對稱」時已學過。)</p> <p>(3) 定義說明</p> <p>學生能正確回答提問後，透過摺疊圖形說明對摺重疊所產生的摺痕為對稱軸；線對稱圖形中的對稱線段等長、對稱角相等性質。</p> <p>3. 定義說明導入活動二</p> <p>(1) 指導學生完成學習單二 (附件 3) 中第一題的摺紙圖形，並說明何謂「等腰直角三角形」？</p> <div data-bbox="279 1355 622 1691" data-label="Image"> </div> <p>(2) 教師口頭提問：圖形是否為線對稱圖形？有幾條對稱軸？</p> <p>(學生可能說出 2 條對稱軸以外的答案，此時請學生動手摺摺看，以驗證其正確性。)</p> <p>(3) 學生作圖及討論</p> <p>學習單二 (附件 3) 討論。</p>	<p>藉由圖形引導學生正確說出 A 點和 B 點、C 點和 D 點重疊；\overline{AE} 與 \overline{BE}、\overline{DF} 與 \overline{CF}、\overline{AD} 與 \overline{BC} 重疊。</p> <p>「對稱點」、「對稱邊」及「對稱角」名稱若學生回答不出來時，需再協助學生複習。</p> <p>確實確認學生摺紙的正確性，以確保其能完成學習單討論。</p> <p>口頭提問後須讓學生動手摺摺看，以引導學生確認有 2 條對稱軸。</p> <p>觀察並檢視學生的學習情況，在旁隨時指導。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>(在圖形上畫出其對稱軸後，並畫出對稱點的連線，藉由摺紙觀察對稱軸與這些對稱點的連線的幾何關係。)</p> <p>(4) 概念說明</p> <p>老師藉由手中摺紙及學習單二來說明「線對稱圖形的對稱軸是對稱點連線段的垂直平分線」的概念。</p> <p>4. 小試身手</p> <p>準備紙張，請學生對摺後，隨機剪下自己喜愛的圖案後，打開紙張，連接對稱點，檢視摺痕(對稱軸)是否為對稱點連線的垂直平分線？</p> <p>5. 回顧與總結</p> <p>(第二節課結束)</p>	<p>可讓學生自行設計，但不宜有過複雜圖形；或由老師準備一些對稱圖形、字體或符號。</p> <p>請學生保管好手中所摺紙張，或教師統一保管，方便第 5、6 課繼續使用。</p>

主題 III：繪製線對稱圖形

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>1. 複習</p> <p>利用活動 II 所摺圖形、學習單二及剪紙的圖形複習簡單圖形與幾何符號、垂直等概念及線對稱圖形中對稱軸跟對稱點連線的關係。</p> <p>2. 實作練習</p> <p>(1) 拿出附件 7 圖形 (1)，請學生說說看，那些點是以直線 L 為對稱軸的對稱點。</p> <p>(2) 請學生剪下附件 7 中的圖形 (1)，對摺觀察，那些點會重合。並完成學習單三 (附件 4) 第一大題的第 1 小題。</p> <p>(3) 拿出附件 7 圖形 (2)，請學生說說看，那些點是以直線 L 為對稱軸的對稱點。</p> <p>(4) 請學生剪下附件 7 中的圖形 (2)，對摺觀察，那些點會重合。並完成學習單三 (附件 4) 第一大題的第 2 小題。</p>	<p>務求學生理解對稱軸跟對稱點連線的關係，以利活動 III 的學習。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>3. 概念運用一</p> <p>(1) 引導學生將附件 7 中的圖形 (1) 中位在對稱軸 L 左側的點以線段連接 (如下圖一)</p> <div data-bbox="256 535 826 878">  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> 圖一 圖二 </div> </div> <p>(2) 引導學生將附件 7 中的圖形 (1) 中位在對稱軸 L 右側的點 (含所畫出其餘點的對稱點) 以線段連接 (如上圖二)</p> <p>(3) 引導學生思考「對稱軸 L 是對稱點連線的垂直平分線」對繪製線對稱圖形有何幫助？</p> <p>(4) 請學生完成學習單三第二大題第 1 小題的線對稱圖形。</p> <p>4. 概念運用二</p> <p>(1) 引導學生將附件 7 中的圖形 (2) 中位在對稱軸 L 左上側的點以線段連接 (如下圖三)</p> <div data-bbox="256 1413 842 1686">  <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> 圖三 圖四 </div> </div> <p>(2) 引導學生將附件 7 中的圖形 (2) 中位在對稱軸 L 右下側的點 (含所畫出其餘點的對稱點) 以線段連接 (如上圖四)</p> <p>(3) 引導學生思考「對稱軸 L 是對稱點連線的垂直平分線」對繪製線對稱圖形有何幫助？</p> <p>(4) 請學生完成學習單三第二大題第 2 小題的線對稱圖形。</p>	<p>圖一連線方式僅供參考，可讓學生自由發揮</p> <p>圖二需配合圖一，依對稱點順序連線</p> <p>圖三連線方式僅供參考，可讓學生自由發揮</p> <p>圖四需配合圖一，依對稱點順序連線</p> <p>要求學生使用直尺或三角板 (為正確畫出垂直，建議以三角板為主。)</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>(第 1 題為「S-5-4 線對稱」學習內容 --- 繪製線對稱圖形，檢視學生先備知識學習狀況。第 2 題為「S-7-4 中對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分」的概念運用。)</p> <p>5. 回顧與總結</p> <p>(第三節課結束)</p>	<p>若學生無法正確畫出第 1 小題，則強化第 1 小題的線對稱製圖，不要過度強調第 2 小題的學習。</p>

主題 IV：線對稱的基本圖形

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>1. 教師口頭提問</p> <p>提問 1：觀察看看，教室內有哪些平面幾何圖形？例如：課本 => 長方形</p> <p>提問 2：上述所觀察到的幾何圖形，是否為線對稱圖形？</p> <p>(此時可追加提問：何謂線對稱圖形？)</p> <p>提問 3：上述觀察到的線對稱圖形，各自有幾條對稱軸？</p> <p>2. 動手操作</p> <p>(1) 猜猜樂</p> <p>拿出附件 8，請學生說說他們認為哪些圖形是線對稱圖形？各有幾條對稱軸？</p> <p>(2) 活動說明：教師舉例說明</p> <p>以正三角形為例，帶領學生操作，並引導學生摺出所有的對稱軸數及觀察其圖形特色。</p> <p>(3) 操作活動</p> <p>讓學生動手剪下附件 8 的所有平面幾何圖形，對摺後，確認是否為線對稱圖形？又有幾條對稱軸？再依學習單四 (附件 5) 指示，將符合線對稱的圖形畫出所有對稱軸後，貼在學習單上，並完成學習單上的問題。</p>	<p>提問 1 可引導學生多觀察</p> <p>(學生可能答案：黑板、桌面、佈告欄 => 長方形、保溫瓶蓋、時鐘 ---=> 圓形。)</p> <p>提問 2 及提問 3，學生回答錯誤時，暫時不立即糾正。</p> <p>追加提問可作為複習。</p>

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>3. 教師口頭提問並說明</p> <p>教師口頭提問</p> <p>提問 1：平行四邊形是否為線對稱圖形？</p> <p>提問 2：正方形的對角線是對稱軸嗎？</p> <p>長方形的對角線是對稱軸嗎？</p> <p>(可先提問何謂對角線？)</p> <p>提問 3：正多邊形是否都為線對稱圖形？各有幾條對稱軸？</p> <p>提問 4：等腰三角形的對稱軸有何特性？</p> <p>提問 5：正三角形的對稱軸有何特性？</p> <p>(每個提問後，可拿出該圖形對摺後並說明。)</p> <p>教師說明</p> <p>(1) 將附件 8 中沒有提問到的圖形一一拿出對摺，檢視是否有重疊，以確認那些圖形為線對稱圖形？並操作說明其對稱軸數及特性。</p> <p>(2) 與學生討論將學習單四中所有線對稱圖形，依對稱軸特性進行分類，以能找出所有對稱軸。</p> <p>(3) 請學生完成學習單三第二大題第 1 小題的線對稱圖形。</p> <p>4. 說明並總結</p> <p>總結說明線對稱基本圖形的概念，尤其學生易誤認的圖形。</p> <p>(第四節課結束)</p> <p>(請學生下堂課將手中所摺紙片帶來課堂。)</p>	<p>1. 鼓勵學生發表，並說明其佐證理由。 (鼓勵學生觀察所完成的學習單四回答問題)</p> <p>2. 藉由提問 1~3 釐清學生錯誤類型：</p> <p>(1) 學生易誤認平行四邊形是線對稱圖形</p> <p>(2) 學生易誤認長方形的對角線是對稱軸。</p> <p>(3) 學生易誤認對稱圖形的對稱軸只有 1 條。</p> <p>3. 藉由提問 4 引導學生發現等腰三角形的對稱軸是底邊的中垂線，頂角角平分線。以利後續 S-8-8 學習。</p> <p>利用完成圖複習平行四邊形不是線對稱圖形。</p>

主題 V：三視圖

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>第 5 節課</p> <p>1. 完成紙張拚片</p> <p>將上堂課部分完成的拚片 (左圖) 完成右圖形式。</p>	

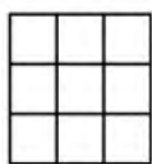
教學活動流程設計	教學注意事項
<div data-bbox="229 387 807 560" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="248 589 520 622">(摺紙步驟參考附件 1)</p> <p data-bbox="220 674 451 707">2. 操作 + 概念回顧</p> <p data-bbox="248 725 842 887">組成一個正立方體共需 6 張 (3 色 \times 2 張)，完成一張拚片後，帶領學生將其餘 5 張正方形完成右圖拚片形式，並於過程中重複活動 I~ 活動 IV 的提問，操作中進行複習。</p> <p data-bbox="220 943 416 976">3. 組裝正立方體</p> <p data-bbox="248 994 616 1028">6 張拚片可組成一個正立方體</p> <p data-bbox="248 1046 842 1162">(要組裝”無限魔方”共需 8 個正立方體，3 色 \times 16 張，共 48 張拚片，課堂中完成 1~2 個正立方體，其他可讓學生利用課餘完成。)</p> <p data-bbox="220 1218 416 1252">4. 教師口頭提問</p> <p data-bbox="248 1270 632 1303">提問 1：如何計算正方體體積？</p> <p data-bbox="248 1321 663 1355">提問 2：如何計算正方體表面積？</p> <p data-bbox="248 1373 842 1442">提問 3：正方體那些面互相平行？又那些面互相垂直？</p> <p data-bbox="432 1460 632 1494">(第五節課結束)</p> <p data-bbox="220 1512 842 1545">(請學生下堂課將手中所組裝成的正方體帶來課堂。)</p> <p data-bbox="220 1601 336 1635">第 6 節課</p> <p data-bbox="220 1653 360 1686">1. 引起動機</p> <p data-bbox="220 1704 842 1774">(1) 共同討論學習單五 (附件 6) 第 1 小題中拍攝照片順序。</p> <p data-bbox="220 1792 842 1861">(2) 依學習單五 (附件 6) 第 2 小題積木排列側面圖推測上方俯視圖。</p> <p data-bbox="248 1879 791 1912">(藉由兩個活動引入三視圖學習的重要性。)</p>	<p data-bbox="903 674 1374 752">利用進行活動 V 過程重複提問活動 I~ 活動 IV 的問題，以強化學生的學習。</p> <p data-bbox="903 943 1374 1144">完成正立方體時，可複習 S-5-5 正方體與長方體、S-5-6 空間中面與面關係、S-6-4 柱體體積與表面積概念，奠定「S-9-12 空間中的線與平面」：「S-9-13 表面積與體積」的學習基礎。</p> <p data-bbox="903 1270 1374 1348">利用完成圖複習平行四邊形不是線對稱圖形。</p> <p data-bbox="903 1697 1374 1861">利用學習單討論作為視圖學習的引入。讓學生感受生活中的數學。題目取材自荷蘭教科書 (2013 彰師大助理教授梁崇惠教授分享)</p>

教學活動流程設計

教學注意事項

2. 三視圖說明

- (1) 請學生將手中正立方體在紙張九宮格 (附件 10) 中排列成右下圖五的立體圖形。

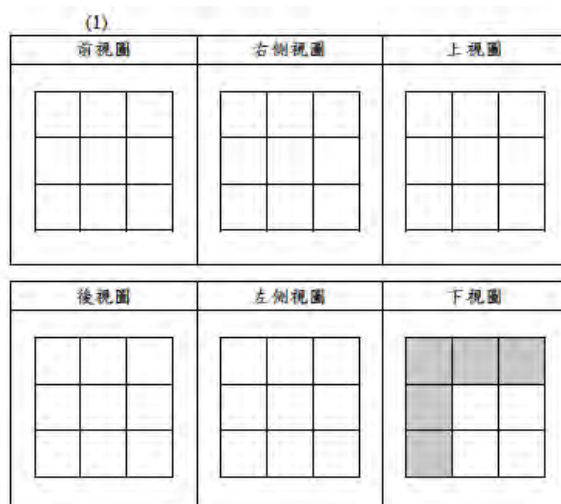


附件 10



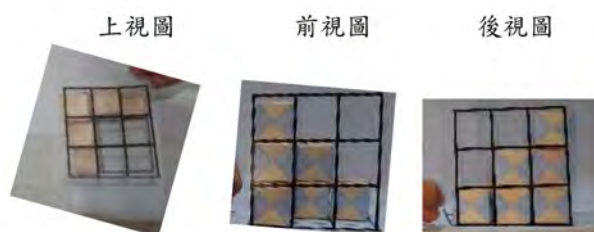
圖五

利用右上圖紙張被正立方體遮蓋部分，說明下視圖的意義。請學生將被正立方體遮蓋部分在附件九視圖方格紙 (1) 的下視圖格內畫斜線或塗顏色。



- (2) 請學生將九宮格透明片置於立體圖形的上、前、後、左、右方向觀察，老師同時說明上視圖、前視圖、後視圖、左視圖、右視圖的意義。

- (3) 引導學生觀察，透過九宮格透明片，所看到立體圖形的狀況。



附件 10 九宮格高度、寬度需依正立方體的邊長調整，本附件約 2.8 公分，適用 2.5 公分 ~2.8 公分。

附件 10 九宮格分別印於紙張及投影片。

紙張九宮格置於排列的立體圖形下，用於觀察下視圖。

透明片用於立體圖形的上、前、後、左、右方向觀察。

透過九宮格透明片觀察三視圖，視線需能平視立體圖形，才能正確觀察。

教學活動流程設計

教學注意事項

右視圖



左視圖



- (4) 引導學生將透明片中被遮蓋部分，以畫斜線或塗顏色方式呈現在附件 9 視圖方格紙 (1) 的視圖格內。

(1)

前視圖	右側視圖	上視圖
後視圖	左側視圖	下視圖

3. 探索活動

- (1) 請學生個人將手中完成的正立方體在紙張九宮格上組成一立體圖形後，分別從立體圖形的上、前、後、左、右方向，透過附件 10 透明片上的九宮格觀察，並將其上視圖、下視圖、前視圖、後視圖、左視圖、右視圖繪製在附件 9 視圖方格紙 (2) 上。
- (2) 請學生將所排立體圖形及所繪製三視圖放置桌上，學生跑桌，由作者介紹自己作品及六個視圖，同學間互相討論視圖是否正確。

留意學生所組成的立體圖形，需內嵌 $3 \times 3 \times 3$ 的正立方體且不中空。並先進行溝通立體形體的前後、上下、左右的位置。

以後續能順利說明三視圖。

可反覆數次，每次更改正立方體數目或合作排列。

(教師可事先準備一些拚好的正方體或正方體積木，若學生沒有將正方體全數組裝時，可派上用場。)

教學活動流程設計	教學注意事項
<p>4. 教師口頭提問及說明</p> <p>(1) 教師提問</p> <p>引導學生觀察附件 9 所繪製的六個視圖 (或剪下以方便翻轉重疊)</p> <p>提問 1：前、後視圖有何關係？ 左、右視圖有何關係？</p> <p>提問 2：透過上視圖，能將你們所推論的下視圖畫出來嗎？</p> <p>(學生無法推論時，可將組合圖形拿起讓學生由下觀察或將組合圖形放置於透明板上，方便學生觀察。)</p> <p>提問 3：數數看上、下、前、後、左、右視圖，各由幾個正方形組成？</p> <p>(2) 教師說明：前視圖與後視圖、左視圖與右視圖、上視圖與下視圖均有全等關係。</p> <p>5. 遊戲時間</p> <p>指導學生將手中正立方體，組成「無限魔方」紓壓玩具。</p> <div data-bbox="255 1292 842 1489">  </div> <p>(第六節課結束)</p>	<p>學生能正確繪製視圖後，引導學生觀察所繪製視圖再進行提問。</p> <p>藉由提問 1、2 引導學生思考僅觀察上視圖、前視圖及右視圖即可推出其他部分。</p> <p>視學生學習狀況，加入提問 3，引導學生透過視圖計算立體圖形的表面積。</p>

附件	<ul style="list-style-type: none"> · 附件 1：拚片摺紙活動完整流程圖 · 附件 2~6：學習單一 ~ 四 · 附件 7：學習單三活動附件 · 附件 8：學習單四活動附件 · 附件 9：三視圖方格紙 · 附件 10：九宮格 (列印在透明投影片上) · 附件 11：前測 · 附件 12：後測
----	---



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

評量 工具



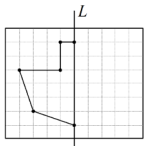
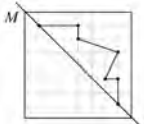
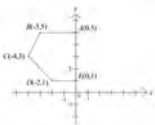
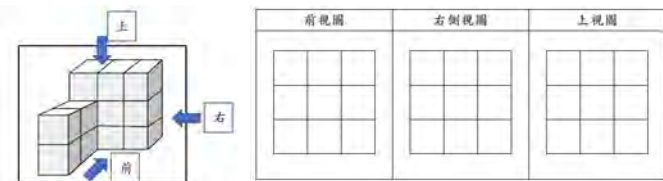
一、口頭提問

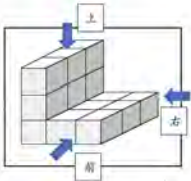
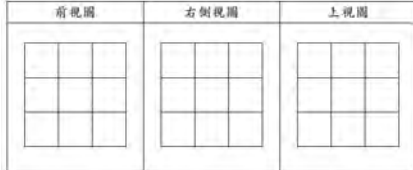
提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 I-1-2-1	這張正方形紙張對摺可以重疊嗎？若可以，有哪些對摺法？	正方形色紙
主題 I-1-2-2	這正方形紙張是否為線對稱圖形？	
主題 I-1-2-3	何謂線對稱圖形？	
主題 I-1-2-4	能依「將點跟點重合，使線段重疊」指示，摺出來一樣的摺痕嗎？	
主題 II-2-2-1	觀察你們手中對摺後的圖形，可看到那些點會重疊？那些線段會重疊？	
主題 II-2-2-2	對摺後，重疊的點、重疊的線段及重疊的角我們給予什麼名稱？	
主題 II-2-3-1	圖形是否為線對稱圖形？有幾條對稱軸？	
主題 IV-4-1-1	觀察看看，教室內有哪些平面幾何圖形？例如：課本 => 長方形	
主題 IV-4-1-2	上述所觀察到的幾何圖形，是否為線對稱圖形？	
主題 IV-4-1-3	上述觀察到的線對稱圖形，各自有幾條對稱軸？	
主題 IV-4-3-1	平行四邊形是否為線對稱圖形？	附件 8
主題 IV-4-3-2	正方形的對角線是對稱軸嗎？長方形的對角線是對稱軸嗎？（可先提問何謂對角線？）	
主題 IV-4-3-3	正多邊形是否都為線對稱圖形？各有幾條對稱軸？	
主題 IV-4-3-4	等腰三角形的對稱軸有何特性？	
主題 IV-4-3-5	正三角形的對稱軸有何特性？	
主題 V-5-4-1	如何計算正方體體積？	正立方體
主題 V-5-4-2	如何計算正方體表面積？	

提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序	問題	配合物品或附件
主題 V-5-4-3	正方體那些面互相平行？又那些面互相垂直？	正立方體
主題 V-6-4-1	前、後視圖有何關係？左、右視圖有何關係？	附件 9
主題 V-6-4-2	透過上視圖，能將你們所推論的下視圖畫出來嗎？	
主題 V-6-4-3	數數看上、下、前、後、左、右視圖，各由幾個正方形組成？	

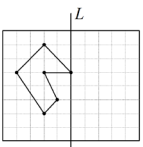
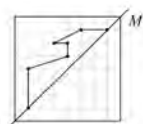
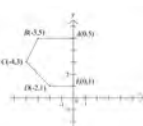
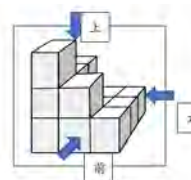
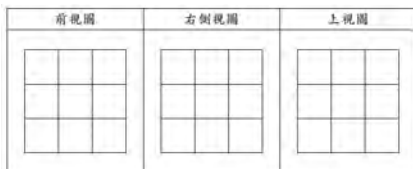
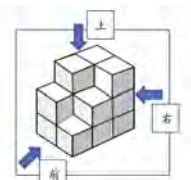
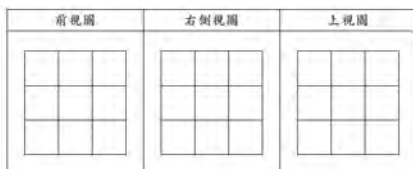
二、前測、後測

(一) 前測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	1、利用方格，完成以下以直線 L 為對稱軸的線對稱圖形 	進行教學前
	S-5-4 線對稱： 繪製線對稱圖形	
第 2 大題	2、以直線 M 為對稱軸，完成以下圖形的線對稱圖形 	
	S-7-4 線對稱性質： 對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分	
第 3 大題	3、以 y 軸為對稱軸，畫出以下多邊形的線對稱圖形 	
	S-7-4 線對稱性質： 對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分	
第 4 大題 (1)	4、看圖來畫畫 	

第 4 大題 (2)	 	
	S-7-2 三視圖： 立體圖形的前視圖、上視圖、左(右)視圖	

(二) 後測

試題	測驗題目	建議評量時間
	測驗核心概念	
第 1 大題	1、利用方格，完成以下以直線 L 為對稱軸的線對稱圖形 	可於第 3 節 課後實施
	S-5-4 線對稱： 繪製線對稱圖形	
第 2 大題	2、以直線 M 為對稱軸，完成以下圖形的線對稱圖形 	可於第 4 節 課後實施
	S-7-4 線對稱性質： 對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分	
第 3 大題	3、以 x 軸為對稱軸，畫出以下多邊形的線對稱圖形 	可於第 6 節 課後實施
	S-7-4 線對稱性質： 對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分	
第 4 大題 (1)	4、看圖來畫畫  	
第 4 大題 (2)	 	
	S-7-2 三視圖： 立體圖形的前視圖、上視圖、左(右)視圖	

三、附件

附件	位置	核心概念	建議使用時間
流程圖	附件 1	摺紙操作流程完整圖	教學活動前，教師先行觀看
學習單	附件 2	幾何符號介紹及定義	主題 I
	附件 3	線對稱的性質	主題 II
	附件 4	畫出線對稱圖形	主題 III
	附件 5	線對稱的基本圖形	主題 IV
	附件 6	三視圖準備活動	主題 V(第 6 節課)
操作活動	附件 7	摺紙戳洞，引入對稱軸是對稱點的中垂線	附件 4 學習單教學後
	附件 8	摺紙觀察基本圖形的特性	附件 5 學習單教學後
	附件 9	三視圖表格	主題 V 觀察三視圖
	附件 10	九宮格	

教學反思 應用建議



在本補強課程模組設計之初，教學方式設定在實體教學的狀況，又學生普遍對數學學習興趣缺缺，所以教材設計以操作活動為主，希望透過動態教學來帶動學生學習興趣。然而因為受到疫情無預警停課影響，原定的實體教學只能改為線上教學，為探討操作型教學是否能適用在線上教學，因此我們沒有更改教學內容，僅在操作過程中加入實物投影機，讓學生能掌握操作步驟的過程，希望一樣能達到讓學生有持續學習的動力。

線上教學期間時，本校學生大多是利用手機進行線上學習，部分學生家中沒有網路，都是到同學家連線。因此前測測驗於教學模組教學的前一天放置於線上，請學生於上課前上傳回來即可，測驗收回後，發現學生答對率不低，本認為學生在課堂上已習得該有的知識概念，但課堂中提問時，表現卻呈現不出測驗結果應有的知識。而後測的表現，在畫線對稱圖形部分不如預期，可知在線上進行操作教學，即使利用實物投影機來呈現操作過程，但無法適時地檢視每位學生是否有確實操作或其操作過程的正確性，較不容易掌控學生的學習。

恢復實體上課後，邀請他校教師依本教案進行實體教學，學生在學習時，由於有

操作的部分，發現學生有別於以往的安靜，有問有答，也積極要完成作品，當然利用摺紙的操作活動教學，跟反覆練習的教學比較起來，不一定能讓學生考出較高分的成績，但反覆練習的教學，學生學習會疲乏。而操作教學，學生有反應，再將數學概念融入操作過程中，學生沒有壓力的學習，更能引起學生的興趣，只要學生不放棄，定能進步的。

一、學生表現

(一) 前測成績表現

學生	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題 前視圖	第 4 題 右視圖	第 4 題 上視圖	第 5 題 前視圖	第 5 題 右視圖	第 5 題 上視圖	正確率 (%)
學生 1	○	×	○	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 2	○	×	○	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 3	○	○	○	○	×	○	○	×	○	77.8
學生 4	○	×	○	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 5	×	○	○	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 6	×	○	○	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 7	○	×	○	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 8	○	×	○	×	○	○	○	○	○	77.8
學生 9	○	○	×	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 10	○	×	×	○	○	○	○	○	○	77.8
答對 比率 (%)	80	40	80	90	90	100	100	90	100	

(二) 後測成績表現

學生	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題 前視圖	第 4 題 右視圖	第 4 題 上視圖	第 5 題 前視圖	第 5 題 右視圖	第 5 題 上視圖	正確率 (%)
學生 1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	100
學生 2	○	○	○	○	○	○	○	○	○	100
學生 3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	100
學生 4	○	×	○	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 5	○	○	○	○	○	○	○	○	○	100
學生 6	○	×	○	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 7	○	○	×	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 8	○	×	○	○	○	○	○	○	○	88.9
學生 9	○	○	○	○	○	○	○	○	○	100
學生 10	○	×	×	○	○	○	○	○	○	77.8
答對 比率 (%)	100	60	80	100	100	100	100	90	100	

（三）前、後測結果比較

1. 學生 4、10 前、後測對錯題目一模一樣，沒有任何進步。
2. 學生 6、學生 7 前後測答對率一樣，但對錯題目不一樣。
3. 三視圖部分，學生前、後測表現都很好。
4. 第 2 題表現在後測雖然有進步，但不論在前測或後測，學生在畫「對稱軸斜 45 度角的對稱圖形」概念上稍顯不足。

二、教學情形

（一）對稱軸教學部分

1. 學習單一、二的摺紙活動學習單希望引起學生興趣，且幫助尚未進入抽象思考期的學生建立「對稱點」及「(水平、鉛垂)對稱軸」兩概念的理解。活動中學生感覺不像在上數學課，願意參與且摺紙過程頻頻發問。線上教學時，不易見到每個學生摺紙的過程，雖然能讓學生有實際體會對稱圖形的全等性。但是礙於無法一一檢視學生摺紙過程，在分享幾何關係時，發現學生不易推導出對稱點連線和對稱軸的關係。而實體教學時，學生沒有上數學的感覺，能根據引導確實畫線，觀察對摺重疊或測量，因此學生較能推導出對稱點連線和對稱軸的關係。
2. 學習單三，對 45 度對稱軸的觀察，讓學生從實作的具體體驗中將「對稱軸是對稱點連線段的垂直平分線」這一個拗口又複雜的概念。從學生討論狀況可感受到線上教學與實體上課無差異。
3. 學習單四，納入學生熟悉的平面圖形，實體教學時教學時間長，但對於學習進度較慢的學生而言，花時間摺這十多個圖形，可幫助學生歸納出特殊圖形的對稱軸數目及對稱軸的特性。而線上教學，為了讓學生能看得清楚又明白，改由老師線上操作並引導學生觀察，學生自我練習。但透過螢幕，無法真正確認學生自我練習狀況。

（二）三視圖教學部分

1. 學習單五的第一題讓學生先體驗到「視角」的變化，再帶入三視圖的介紹，很有素養教學的 feeling，無論線上教學或實體教學，學生參與高，討論熱烈，也能帶出學習三視圖的實用性。在活動 VI 加入學習五活動，雖然學生討論熱烈，但容易壓縮到三視圖的學習時間，
2. 進入三視圖教學時，教學設計是利用「透明片九宮格」來觀察視圖，並察覺其之間的關係，進而能從三視圖中觀察期結構圖表面積的量。但螢幕上呈現九宮

格教學時，透過鏡頭學生視角距離無法正確觀察出視圖，因此學生只能憑藉教師的說明來繪製三視圖。因此「九宮格透明片教學」較適合實體上課時使用。

三、反思建議

(一) 反思

1. 本教案設計期望也能在一般課堂上使用，教學設計就從最基本的「幾何符號」開始，希望引起學生學習共鳴。但參與扶助補強的部分學生對「幾何符號」已有基礎，加上對摺紙有興趣，因此急著將所有拚片完成，忽略老師的引導及說明，造成後續時常發問，影響其他同學學習。
2. 學習單五第一題觀察六個圖形先後順序，本只是要引發學生學習「三視圖」的動機，結果學生對此觀察題興趣高昂，不斷討論及修正，絲毫不放棄，見學生討論熱絡，不忍打斷他們。反而壓縮到真正的主題活動「三視圖」的學習時間。
3. 三視圖教學以 $[3 \times 3 \times 3]$ 的立體圖形結構來介紹，學生程度不一，部分同學花很多時間觀察，看到其他同學已完成，就放棄繼續完成。
4. 教學過程希望能引導學習較佳的學生去觀察立體圖形表面積與三視圖的關係，但礙於線上教學無法呈現出效果。
5. 後測第 3 題，發現學生的錯誤不是畫圖問題而是沒看清題目，將題目「以 x 軸為對稱軸，畫出以下多邊形的線對稱圖形」，依習慣將線對稱圖形「以 y 軸為對稱軸」來作圖。

(二) 建議

1. 扶助補強學生若對「符號表示」這部分的學習沒問題時，可將活動 I 簡化或與活動 II 合併學習，並在課堂學習中，只發下一張正方形紙張配合學習活動即可。等到第 5 節課才將附件 1：拚片摺紙活動完整流程圖及其餘正方形紙張發給學生。
2. 針對學習單五第一題觀察六個圖形先後順序，考量學習時間及學生程度，可省略跳過，直接進入主題「三視圖」的學習；或可將六個圖形先抽取四個讓學生來排出先後順序即可；或再請學生觀察剩下兩個圖形應該插入在哪個位置為宜；或將此活動移至第五節課下課前先行觀察。
3. 三視圖教學，若考量教學時間或學生程度，在教學中可先採用較簡化的單一圖形或 $[2 \times 3 \times 3]$ 的立體圖形來讓學生觀察，可以讓學生的學習更有層次感。
4. 線上教學時，可將立體圖形表面積與三視圖的關係此部分省略。或提供網路中的三視圖拚圖遊戲，讓學生透過電腦來操作三視圖繪製的練習。

5. 鑑於後測第 3 題學生未看清題目內容而造成錯誤，因此，建議將前測第 3 題「以 y 軸為對稱軸」中的「 y 軸」及後測第 3 題「以 x 軸為對稱軸」中的「 x 軸」部分，畫底線，以清楚提醒學生注意題目。

四、疫情影響本課程之運作情形

本課程模組之設計在實體教學的狀況下，但因改成線上教學。許多學生的操作過程，在螢幕前教師無法一一檢視，又學生待在家中，周遭環境是否會產生學習干擾，無法確定。前、後測為線上測驗，學生是否用心填寫，都留待後續相關研究釐清。

參考文獻

- Richard R. Skemp (1988)。數學學習心理學（林義雄、陳澤民譯）。九章出版。（原著出版於 1987 年）。
- 王文科 (2000)。布魯納的認知發展論 (**Bruner's Theory of Cognitive Development**)。樂詞網。<https://terms.naer.edu.tw/detail/ca235e3e26a574413696812b8f0c7825/>

國民中學補強課程模組教學資源手冊

國中數學 七年級

總 策 劃	甄曉蘭
主 編	陳致澄
作 者	陳致澄、蘇恭弘、盧昭雯、江世賓、張廷吉、莊佶達
編 輯	莊幸諺
發 行 人	彭富源
出 版 機 關	教育部國民及學前教育署
地 址	臺中市霧峰區中正路 738 之 4 號
電 話	04-3706-1800
網 址	https://priori.moe.gov.tw/index.php?mod=resource/index/content/material
出 版 年 月	2023.07.01 初版
ISBN	9786263451384 (PDF)
電子書設計製作	華誼實業有限公司
地 址	新北市中和區光華街 65 號
電 話	(02)2249-5678
電子書播放資訊	作業系統 不限 檔案格式 PDF 檔案內容 文字 使用載具 不限



本書同時登載於國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺 <https://priori.moe.gov.tw/>



本著作採用創用 CC「姓名標示、非商業性、相同方式分享」授權條款釋出。
創用 CC 內容請見：http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW

國民中學
補強課程模組教學資源手冊
國中數學
七年級



教育部國民及學前教育署
K-12 Education Administration, Ministry of Education

ISBN 978-6263-451-38-4



9 786263 451384